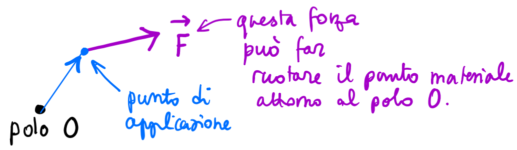
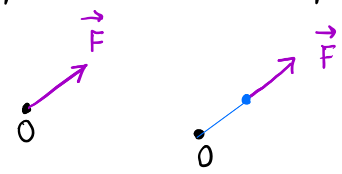
MOMENTO di UNA FORZA : il "POTERE ROTAZIONALE"

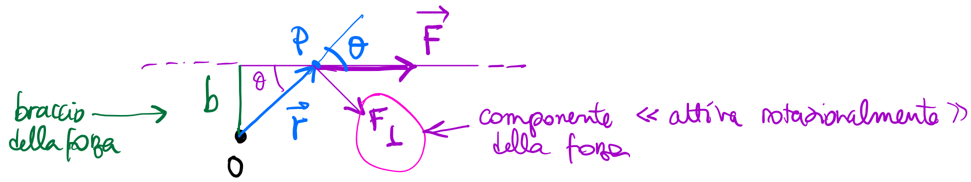
Ci si interessa al caso in cui una forza è applicata in un punto che dista da un possibile polo / asse di rotazione.





queste forze NON fanno ruotare il punto attorno a O
[ma sono in grado di "strattonare"]

Si introduce il « potere rotazionale » della forza applicata in un punto P rispetto a un dato polo O considerando una distanza non nulla fra P e O e un'orientazione « efficace » della forza ai fini del suo intento rotazionale.



Il potere rotazionale di $\vec{F}$ riferita al polo O è il suo MOMENTO e vale in modulo

$$\tau_O = b \cdot F = r F_\perp$$

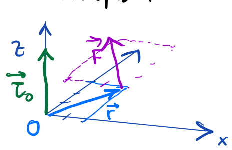
con $b = r \sin\theta$ e $F_\perp = F \sin\theta$ per cui $\tau_O = r F \sin\theta$ ← angolo minore fra $\vec{r}$ e $\vec{F}$.

Vale la definizione VETTORIALE per il momento $\vec{\tau}_O$ di $\vec{F}$ rispetto il polo O :

$$\boxed{\vec{\tau}_O = \vec{r} \times \vec{F}}$$

NB : $\vec{\tau}$ è un vettore perpendicolare al piano che contiene $\vec{r}$ e $\vec{F}$.

Per esempio : $\vec{r} = (2,3)$ m $\quad \vec{F} = (-2,4)$ N



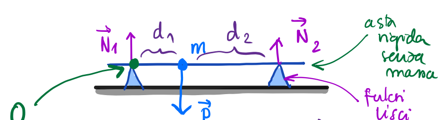
$$\vec{\tau}_O = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 3 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \end{vmatrix} = (14\ \text{N}\cdot\text{m})\,\hat{k}$$

Il momento di una forza ha dimensioni $[\tau] = [rF] = [ML^2T^{-2}]$ e si misura nel SI in N·m.

NB2 : la forza può "scorrere" liberamente lungo la retta di appartenenza (retta di « azione ») senza che il suo momento cambi.

STATICA per FORZE PARALLELE

La condizione $\sum \vec{F} = 0$ non è sufficiente ad assicurare l'equilibrio perché esistono COPPIE di forze a risultante nulla ma che esercitano momento (→ possono far ruotare)



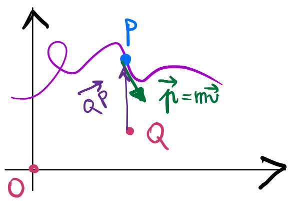
Condizione statica : $\vec{N}_1 + \vec{N}_2 + \vec{P} = 0 \;\rightarrow\; P = N_1 + N_2$

e $\vec{\tau}_O^{(TOT)} = 0$ ← qualunque polo

$$\tau_O = d_1 P - (d_1+d_2) N_2 = 0 \Rightarrow \boxed{N_2 = \frac{d_1}{d_1+d_2} P} \;;\; \boxed{N_1 = P - N_2 = \frac{d_2}{d_1+d_2} P}$$

IL MOMENTO ANGOLARE di una MASSA (PUNTIFORME)

Situazione: massa m con quantità di moto $\vec{p} = m\vec{v}$ in un dato sistema di riferimento inerziale. Si considera anche un generico polo Q:

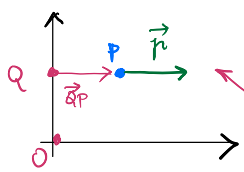


Si definisce il MOMENTO ANGOLARE (o « momento della quantità di moto ») relativo al polo Q la grandezza vettoriale

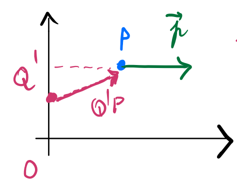
$$\boxed{\vec{L}_Q = \vec{QP} \times \vec{p}}$$

NB si trova erroneamente scritto che una massa ha momento angolare solamente se sta ruotando. Questa è condizione sufficiente, ma non necessaria..

Infatti



in questo caso $\vec{L}_Q = 0$ perché $\vec{QP}$ e $\vec{p}$ sono paralleli.



in questo caso $\vec{L}_{Q'} = \vec{Q'P} \times \vec{p} \neq 0$ perché $\vec{Q'P}$ e $\vec{p}$ non sono paralleli

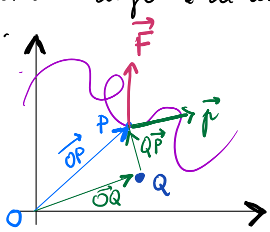
In pratica $\vec{L}_Q$ può essere non nullo anche se la massa si muove di moto rettilineo.

Il momento angolare ha dimensioni $[L] = [rp] = [ML^2T^{-1}]$ e nel SI si misura in $kg \cdot m^2/s$.

TEOREMA del MOMENTO ANGOLARE

Si scopre che il momento angolare di una massa varia se su di essa agisce un momento di forza.

Situazione:



Si considerano i momenti (angolare e della forza agente su P) riferiti allo stesso polo Q.

$$\vec{L}_Q = \vec{QP} \times \vec{p} \; ; \; \vec{\tau}_Q = \vec{QP} \times \vec{F} .$$

Si calcola la variazione nel tempo di $\vec{L}_Q$: $\frac{d\vec{L}_Q}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{QP} \times \vec{p}) =$

velocità di P e di Q riferite a O

$$= \left(\frac{d(\vec{QP})}{dt}\right) \times \vec{p} + \vec{QP} \times \frac{d\vec{p}}{dt} \; ;$$

vale $\vec{QP} = \vec{OP} - \vec{OQ} \Rightarrow \frac{d\vec{QP}}{dt} = \frac{d\vec{OP}}{dt} - \frac{d\vec{OQ}}{dt} = \vec{v}_P - \vec{v}_Q$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{L}_Q}{dt} = (\vec{v}_P - \vec{v}_Q) \times \vec{p} + \vec{QP} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$$

dove $\begin{cases} \vec{p} = m\vec{v}_P \\ d\vec{p}/dt = \vec{F} \end{cases}$ (II legge di Newton) $\Rightarrow \vec{v}_P \times \vec{p} = 0$ $[\vec{v}_P \parallel \vec{p}]$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{L}_Q}{dt} = \vec{QP} \times \vec{F} - \vec{v}_Q \times \vec{p}$$

questo è $\vec{\tau}_Q$

Si considera $\vec{v}_Q = 0$ (Q è fermo in Oxy), oppure $\vec{v}_Q \parallel \vec{p}$. $\Rightarrow \frac{d\vec{L}_Q}{dt} = \vec{\tau}_Q$

La variazione del momento angolare rispetto al polo Q è data dal momento della forza riferito allo stesso polo.