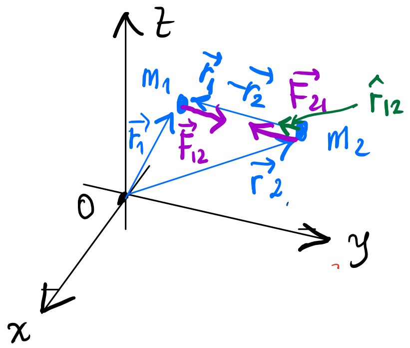
UNA FORZA FONDAMENTALE: la GRAVITÀ

È una forza fondamentale nel senso che è universale e non derivata da altri tipi di forze o interazioni.

È stata studiata a lungo e gradualmente messa a fuoco e formalizzata da Hooke e Newton.

Scrittura moderna della forza di gravitazione fra due masse puntiformi m_1 e m_2 separate da una distanza r_{12}:



$\vec{F}_{12}$: forza su m_1 dovuta a m_2
(e $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$, forza su m_2 dovuta a m_1)

$$\boxed{\vec{F}_{12} = -G\,\frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}\,\hat{r}_{12} = -\vec{F}_{21}}$$

dove $r_{12} = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$ è la distanza fra m_1 e m_2 e $\hat{r}_{12}$ è il versore di $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$,

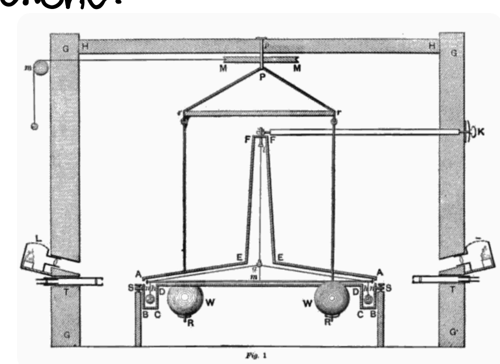
$$\hat{r}_{12} = \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}$$

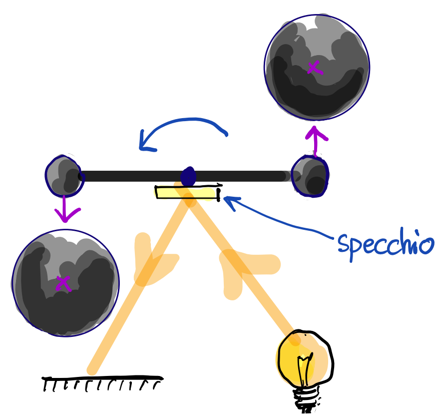
La forza vale fra masse puntiformi ma anche, si dimostra, fra corpi sferici uniformi con la massa concentrata nel loro centro geometrico.

G è una costante di «calibrazione» della forza e vale

$$\boxed{G \cong 6.67 \times 10^{-11}\ N \cdot m^2/kg^2\ (m^3/s^2 kg)}$$

Il suo valore può essere ottenuto a partire da misure della densità della Terra che, a sua volta, sono fatte risalire a osservazioni sperimentali condotte da Cavendish nel '700 tramite la sua bilancia a torsione.





Ingredienti di Newton:

- leggi osservative di Keplero
- leggi di moto e inerzia di Galilei
- legge del moto circolare di Huygens

e i suoi principi:

- forza e accelerazione
- azione & reazione

Ricetta di Newton:

i pianeti ruotano attorno al sole con orbite "quasi" circolari (I legge di Keplero) e con tempi / raggi legati dalla relazione empirica (III legge di Keplero)

$$\boxed{r^3/T^2 = C_S}$$

dove C_S è una costante propria del sistema solare.

In un moto circolare uniforme l'accelerazione è puramente centripeta ed è data da

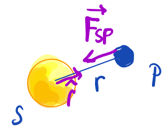
$$\boxed{a = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r = \frac{4\pi^2 r}{T^2}}$$

dove si scrive $\omega = 2\pi/T$ per il periodo T. Usando la III legge di Keplero dunque

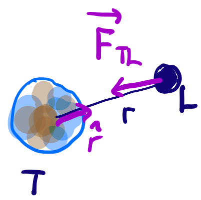
$$\boxed{a = 4\pi^2 r \frac{1}{T^2} = \frac{4\pi^2 \cdot C_S}{r^2}}$$

per cui la forza newtoniana esercitata dal Sole su un pianeta di massa m_P è

$$\boxed{\vec{F}_{SP} = m_P \vec{a} = -\frac{4\pi^2 C_S \cdot m_P}{r^2}\,\hat{r}}$$



Secondo Newton lo stesso tipo di forza deve essere esercitato universalmente, ovvero anche dalla Terra (per esempio) su il suo satellite, la Luna. Cambia la costante di Kepler, ovvero si scrive per la forza esercitata dalla Terra su un satellite di massa m_L:



$$\boxed{\vec{F}_{TL} = m_L \vec{a} = -\frac{4\pi^2 C_T\, m_L}{r^2}\,\hat{r}}$$

Sulla superficie della Terra, a distanza R_T dal suo centro, in modulo, per un corpo m_C

$$\boxed{F_{TC}(r = R_T) = \frac{4\pi^2 C_T\, m_C}{R_T^2}}$$

dove, si ricorda, $C_T = \frac{r_{TL}^3}{T_{TL}^2}$ preso il sistema Terra-Luna, per cui sulla Terra

$$\boxed{F_{TC} = \frac{4\pi^2 r_{TL}^3}{T_{TL}^2 \cdot R_T^2}\, m_C}$$

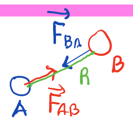
valori numerici: $r_{TL} \simeq 3.8 \times 10^8\ m$
$T_{TL} \simeq 30$ giorni
$R_T \simeq 6.6 \times 10^6\ m$

Dunque su una massa m_s al suolo terrestre agisce la forza $\boxed{\vec{F}_{TC} = m_s \vec{g}}$ dove

$$\boxed{\vec{g} = -\frac{4\pi^2 r_{TL}^3}{T_{TL}^2 R_T^2}\,\hat{r} \simeq -9.8\,\frac{m}{s^2}\,\hat{r}}$$

(in realtà Newton "usa" questa relazione per stimare r_{TL} a partire da g)

ATTENZIONE: la relazione di attrazione fra corpi è valida universalmente, ovvero non dipende dalla scelta del "pianeta" di riferimento. Infatti:



$$\begin{cases} F_{BA} = \dfrac{4\pi^2 C_A}{R^2} m_B \\ F_{AB} = \dfrac{4\pi^2 C_B}{R^2} m_A \end{cases}$$

$F_{BA} = F_{AB}$
$\Downarrow$
$C_A m_B = C_B m_A \Rightarrow \dfrac{C_A}{m_A} = \dfrac{C_B}{m_B}$ è una costante universale indipendente da A e B (o qualsiasi altro corpo).

Si pone $4\pi^2 C_x / m_x = G$

$$\Rightarrow \quad F_{AB} = \frac{4\pi^2}{R^2} C_A m_B = \frac{4\pi^2}{R^2}\frac{C_A}{m_A} \cdot m_A m_B = G\frac{m_A m_B}{R^2} = F_{BA}$$

- "Pesata" della Terra

L'accelerazione di gravità (terrestre) al suolo si può anche riscrivere così:

$$m_0 g = G\frac{m_0 m_T}{R_T^2} \Rightarrow \boxed{g = \frac{G m_T}{R_T^2}}$$

(m_T è la massa della Terra, R_T il suo raggio).

G si ottiene sperimentalmente dalla bilancia di torsione di Cavendish,
g da esperimenti di accelerazione di corpi alla superficie terrestre,
R_T da misurazioni geografiche / astronomiche $\Rightarrow$

Si ottiene la massa della Terra

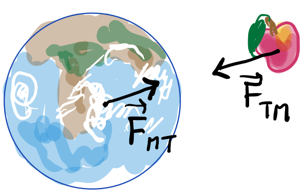
$$m_T = g/G \; R_T^2 \simeq \frac{10\, m/s^2}{6.7\times 10^{-11}\, \frac{Nm^2}{kg^2}} \times (6.5\times 10^6 m)^2 \simeq 6 \times 10^{24}\, kg$$

Si può ottenere anche la sua densità media:

$$\boxed{\rho_T = \frac{m_T}{V_T} = \frac{3 m_T}{4\pi R_T^3} = \frac{3}{4\pi}\frac{g}{G}\frac{1}{R_T} \simeq 5.3 \times 10^3\, kg/m^3.}$$

NB le difficoltà di Newton
(1) R_T è poco accurato a quel tempo $\Rightarrow$ anche g lo è
(2) Difficile tenere conto dell'estensione spaziale (sferica) delle masse;
(3) non c'era il calcolo infinitesimale!

NB2 La questione della mela di Newton



$\vec{F}_{TM} = -\vec{F}_{MT}$, $m_M \simeq 0.1\, kg$

(la forza di attrazione fra i due oggetti è la STESSA) e vale (vicino al suolo)

$$\boxed{F_{MT} = m_M g \simeq 1 \text{ newton } (0.1\, kg \times 10\, m/s^2)}$$

Le accelerazioni sono ben diverse: $a_M = \dfrac{F_{MT}}{m_M} \simeq 10\, m/s^2$; $a_T = \dfrac{F_{MT}}{m_T} \simeq 1.7\times 10^{-25}\, m/s^2$

La forza di gravitazione come interazione centrale

La forza di gravitazione universale è di tipo centrale in quanto radiale, perché è diretta secondo la congiungente le due masse interagenti e dipende esclusivamente dal modulo del vettore congiungente.

Cioè è del tipo

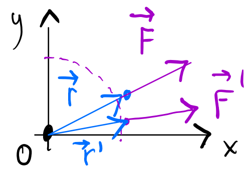
$$\boxed{\vec{F}(\vec{r}) = F(r)\,\hat{r}}$$

direzione di $\vec{r}$ (radiale)

modulo di $\vec{F}$

modulo di $\vec{r}$ (centrale)

Ci si pone in un riferimento centrato su una delle due masse



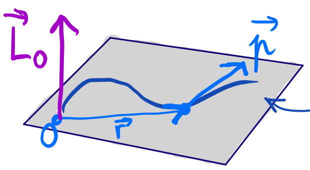
se $|\vec{r}| = |\vec{r}'| \Rightarrow |\vec{F}| = |\vec{F}'|$ anche se $\vec{r}$ e $\vec{r}'$ non hanno la stessa direzione.

Il momento angolare di una massa soggetta alla forza di gravitazione universale (dunque a una forza centrale) è un vettore costante.

Infatti, se $\vec{F} = F\hat{r}$, rispetto il polo O è $\vec{\tau}_O = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times (F\hat{r}) = \vec{0}$ perché $\vec{r}$ e $\hat{r}$ sono paralleli.

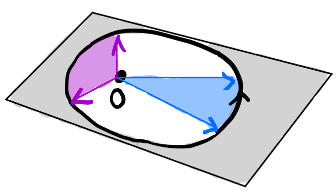
Quindi, dalla $\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{\tau}_O \Rightarrow \vec{L}_O = \vec{cost}$.

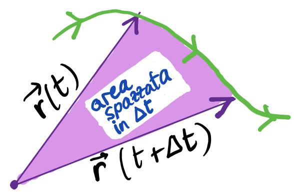
Essendo $\vec{L}_O = \vec{r} \times \vec{p}$, nel caso di traiettorie sotto l'azione di forze centrali il moto è in un piano con orientazione fissa (la perpendicolare è nella direzione di $\vec{L}_O = \vec{cost}$)



orientazione fissa.

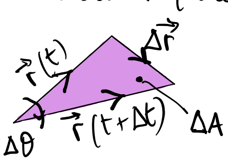
Anche il modulo L_O di $\vec{L}_O$ è costante: la conseguenza è la costanza della «velocità di area»





rapidità con la quale il raggio vettore "spazza" aree racchiuse dalla traiettoria.

Calcolo dell'area (dalle proprietà dei parallelogrammi)



$\Delta A = \frac{1}{2}|\vec{r}(t+\Delta t) \times \vec{r}(t)|$; $\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t) = \vec{v}_n(t)\cdot\Delta t \Rightarrow \vec{r}(t+\Delta t) = \vec{r}(t) + \vec{v}_n\Delta t$

$\Rightarrow \Delta A = \frac{1}{2}|(\vec{r}(t) + \vec{v}_n\Delta t) \times \vec{r}(t)| = \frac{1}{2}|\vec{v}_n \times \vec{r}(t)|\,\Delta t$

velocità di area istantanea $\quad V_A \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{2}|\vec{v}_n \times \vec{r}(t)| = \frac{1}{2}|\vec{v} \times \vec{r}| = \frac{1}{2m}|\vec{r} \times \vec{p}| = \frac{|\vec{L}_O|}{2m} = cost$

$\Rightarrow$ **Siccome $\vec{L}_O$ è costante $\Rightarrow |\vec{L}_O|$ è costante $\Rightarrow V_A$ è costante.**

LEGGI di KEPLER

Sono leggi di origine osservativa riferite ai moti dei pianeti nel sistema solare.
Cronologicamente anticipano la teoria newtoniana della gravitazione.

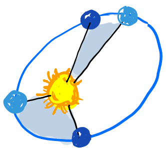
I. Le traiettorie dei pianeti sono ellissi nello stesso piano (eclittica) con orientazione costante. Il sole occupa uno dei fuochi.

II. In tempi eguali il raggio vettore del pianeta spazza aree eguali

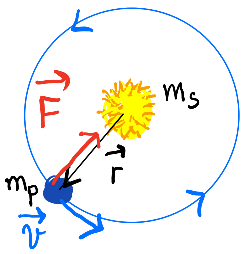
III. Il quadrato del periodo di rivoluzione di un pianeta attorno al sole è in rapporto costante con il cubo del semiasse maggiore dell'ellisse percorsa dal pianeta.

La I legge si può verificare risolvendo l'equazione del moto (relativo) del pianeta soggetto alla forza newtoniana di gravitazione universale e ricordando che il momento angolare è un vettore costante.

La II legge è conseguenza della centralità della forza di gravitazione ovvero, come si è visto, del fatto che il momento angolare è in modulo costante.



Come anticipato, la III legge è uno dei capisaldi empirici per giustificare la legge newtoniana della forza. Per orbite circolari:



in modulo $F = \dfrac{G m_p m_s}{r^2} = \dfrac{m_p v^2}{r}$ (massa del pianeta: m_p; massa solare: m_s)

$$\Rightarrow \frac{G m_s}{r} = v^2 \Rightarrow \omega^2 = \frac{v^2}{r^2} = \frac{G m_s}{r^3} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\left(T^2/r^3\right) = \frac{4\pi^2}{G m_s} = C_s}$$ come già discusso.

Si può costruire una tabella per i pianeti del sistema solare calibrando la costante della III legge al valore unitario, ovvero, a partire dai valori del periodo e della distanza terrestri:

$T = 1$ (anno), $r = 1$ (unità astronomica, $\sim 1.48 \times 10^{11}$ m, distanza media Terra-Sole).

Dati astronomici:

pianeta	Mercurio	Venere	Terra	Marte	Giove	Saturno	Urano	Nettuno	(Plutone)
r = distanza (u.a.)	0.39	0.72	1	1.52	5.2	9.58	19.14	30.19	39.5
T = periodo (anni)	0.241	0.615	1	1.88	11.86	29.5	83.70	164.7	247.7

da confrontare con la III legge di Kepler

Si può graficare la legge $r^3/T^2 = $ costante in scala doppio-logaritmica e ottenere un andamento lineare visto che

$$\log(r^3/T^2) = 3\log r - 2\log T = 0 \iff \log r = \frac{2}{3}\log T$$