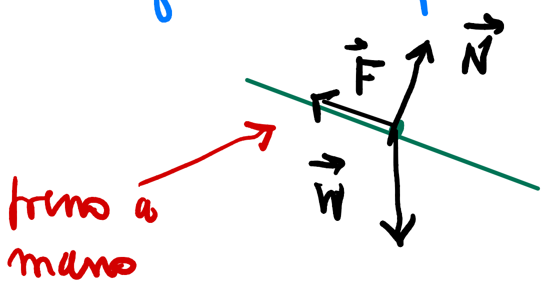
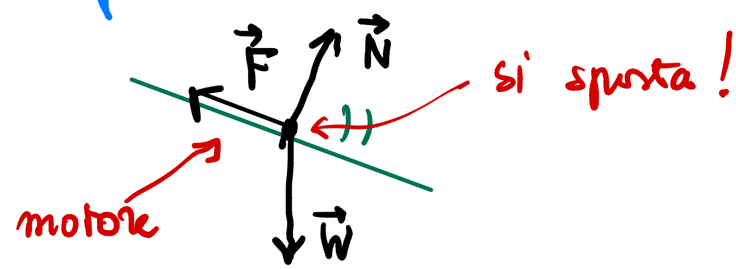
La storia dell'ENERGIA è lunga, complessa e relativamente moderna: se ne inizia a parlare solo nel ~1807 con Thomas Young anche se ci sono inizi e accenni in vari modi passando da idee filosofiche generiche e confuse di « vigore interno » o di « capacità di fare », ἐνεργός.

È interessante anche il dibattito tra Leibnitz (effetti spaziali delle forze) e Huygens (effetti temporali delle forze).
impulso!

Per affrontare in modo compiuto il discorso sull'energia si deve aspettare il contributo di Coriolis che introduce nel 1826 l'idea e la pratica di Lavoro "meccanico".

Qui lo facciamo pensando a situazioni nelle quali delle forze sono impresse a corpi che cambiano posizione e si confrontano queste due semplici situazioni

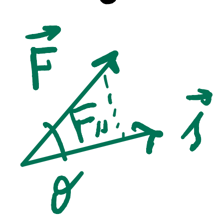




sono molto differenti per causa dello spostamento!

Partiamo proprio DEFINENDO IL LAVORO DI UNA FORZA COSTANTE $\vec{F}$ associato (il lavoro, non la forza) allo SPOSTAMENTO $\vec{s}$:

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s} = F s \cos\theta = F_{\parallel} s$$



Proprietà importanti.

① W è una grandezza scalare!

② Quindi W ha segno (e $W = 0$ se $\vec{F} \perp \vec{s}$)

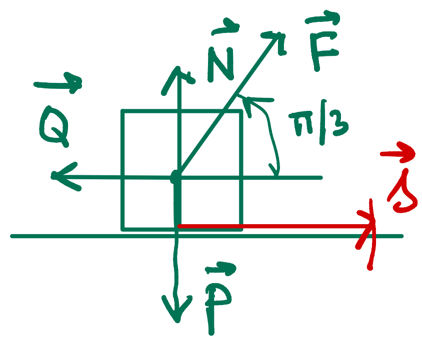
③ Non è detto / necessario che sia $\vec{F}$ la causa di $\vec{s}$!

④ le dimensioni: $[W] = [F \cdot s] = [ML^2T^{-2}]$,

W si misura in joule (J) nel S.I. (e in erg $= 10^{-7}$ J nel cgs)

Valori unitari: $1\,J = 1\,N \cdot 1\,m$ ($1\,erg = 1\,dyne \cdot 1\,cm$)

Breve esempio



$|\vec{s}| = 5\,m$

$P = 50\,N$

$Q = 50\,N$

$F = 100\,N$

$W_{\vec{N}} = W_{\vec{P}} = 0\,J$

$W_{\vec{F}} = (100\,N \times 5\,m) \times \cos\frac{\pi}{3} = 250\,J$

$W_{\vec{Q}} = (50\,N \times 5\,m) \times \cos\pi = -250\,J$

La questione si fa più interessante se si vuole calcolare il lavoro di una forza eventualmente variabile lungo un cammino arbitrario.

Si introduce l'idea di LAVORO ELEMENTARE di una forza associato a uno spostamento INFINITESIMO (così la forza è automaticamente costante!):

$$\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

si chiama FORMA DIFFERENZIALE (che NON è un differenziale "d" ma "δ")

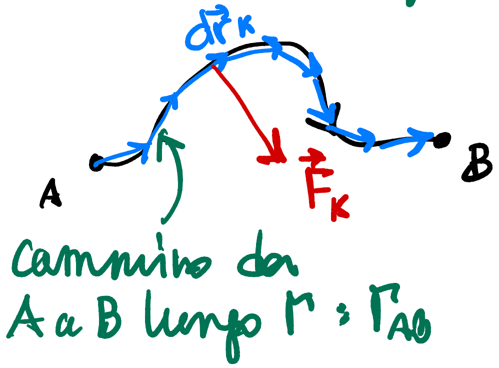
notazione!

$$\text{Quindi } \delta W = F_{\parallel}\, ds = F_{\parallel}\, v\, dt = \vec{F} \cdot \vec{v}\, dt = \vec{v} \cdot d\vec{p}$$

quantità di moto

velocità del punto

Quando ci serve il lavoro totale lungo un cammino finito e arbitrario basta "sommare" i lavori elementari che concorrono a percorrere il cammino:



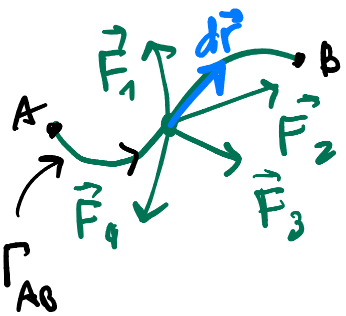
$$W_{\Gamma_{AB}} = \sum_K \delta W_K = \sum_K \vec{F}_K \cdot d\vec{r}_K$$

che, nel limite continuo, è

$$W_{\Gamma_{AB}} = \int_{\Gamma_{AB}} \vec{F} \cdot d\vec{r} \; :$$

integrale curvilineo, o di linea, o di cammino di $\vec{F}$ su Γ_{AB}.

Dimostriamo che per calcolare lungo un dato cammino il lavoro di più forze CONCORRENTI SU UN PUNTO basta sommare i lavori associati alle singole forze.



$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i \; ; \quad \delta W_i = \vec{F}_i \cdot d\vec{r} ; \quad \delta W = \sum_i \delta W_i$$

$$\Rightarrow W_{\Gamma_{AB}} = \int_{\Gamma_{AB}} \delta W = \int_{\Gamma_{AB}} \sum_i \delta W_i = \sum_i \int_{\Gamma_{AB}} \delta W_i =$$

$$= \sum_i \int_{\Gamma_{AB}} \vec{F}_i \cdot d\vec{r} = \int_{\Gamma_{AB}} \Big(\sum_i \vec{F}_i\Big) \cdot d\vec{r} = \int_{\Gamma_{AB}} \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad [\text{QED}]$$

Altra definizione importante in fisica (meccanica) è la POTENZA, che misura la RAPIDITÀ nel TEMPO di EFFETTUARE LAVORO:

$$\langle P \rangle = \frac{W}{\Delta t} \; (\text{media}) \rightarrow P = \frac{\delta W}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} \; (\text{istantanea}).$$

Dimensioni $[\mathcal{P}] = [W/T] = [ML^2T^{-3}]$ (watt nel SI, $1\,W = 1\,J/s$)

Unità ibrida del lavoro kWh $\left(10^3 \frac{J}{s} \times 3600\,s = 3.6 \times 10^6\,J\right)$

Esempio numerico: caduta di $m = 10$ kg da $h = 5$ m sotto l'azione del suo peso.

Lavoro svolto dal peso $W = \vec{P} \cdot \vec{s} = mg\,h \cong 500\,J$ $\left(g \simeq 10\,m/s^2\right)$

cade in $t = t_c = \sqrt{\frac{2h}{g}} \sim 1\,s$

Potenza media messa in gioco dal peso: $\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{W}{t_c} = 500$ watt

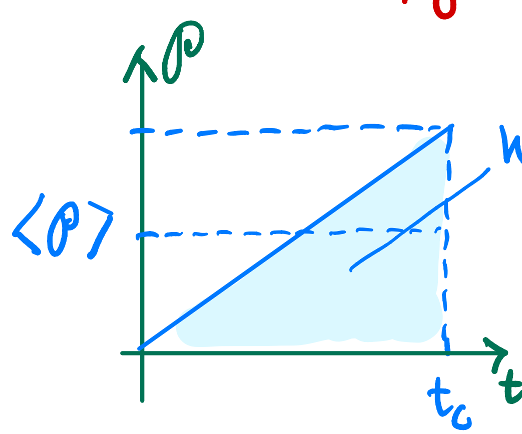
Potenza istantanea varia con t: $\mathcal{P} = \vec{P} \cdot \vec{v} \overset{v=gt}{=} mg^2 t$ $\left(\vec{v} = \vec{g}t \parallel a \, \vec{P}\right)$

Lavoro svolto istantaneamente dal peso $W(t) = \vec{P} \cdot \vec{s}(t) = mg \cdot \frac{1}{2} g t^2 = \frac{1}{2} m g^2 t^2$

e infatti $\frac{dW}{dt} = mg^2 t = \mathcal{P}$ (istantanea)

Potenza totale messa in gioco dal peso nella caduta $\mathcal{P}_{TOT} = \vec{P} \cdot \vec{v}_c = mg \cdot g t_c = mg^2 \cdot \sqrt{\frac{2h}{g}} = 1000$ watt

Notare che $\mathcal{P}_{TOT} = 2\langle \mathcal{P} \rangle$ come torna dall'andamento lineare di $\mathcal{P}$ (istantanea) nel tempo:



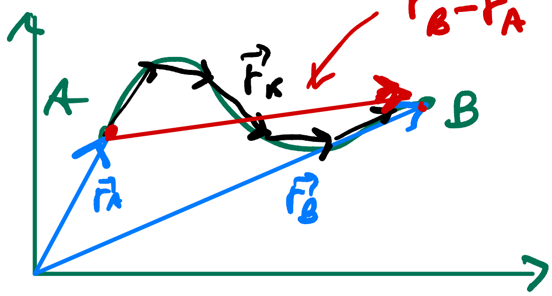
$W = \int_0^{t_c} \mathcal{P}\,dt = mgh = \frac{1}{2} m g^2 t_c^2$

Come si calcola il lavoro di qualche situazione «utile»

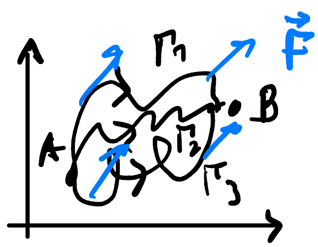
Se la forza non cambia lungo il cammino il conto si riduce a

$$W_{\Gamma_{AB}} = \int_{\Gamma_{AB}} \vec F \cdot d\vec r = \vec F \cdot \int_{\Gamma_{AB}} d\vec r = \vec F \cdot (\vec r_B - \vec r_A)$$

perché $\int_{\Gamma_{AB}} d\vec r \leftrightarrow \sum_{\vec r_A \to \vec r_B} \vec r_K$



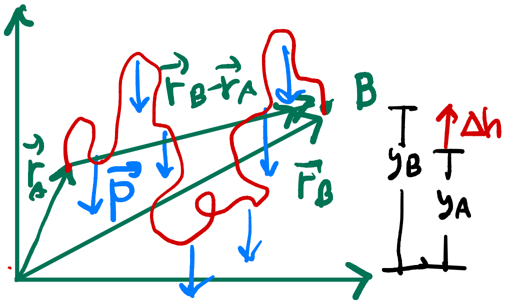
Se ne deduce che se $\vec F$ è costante allora il lavoro che le si associa per qualunque cammino dipende solo (oltre che da $\vec F$) dallo SPOSTAMENTO COMPLESSIVO e NON dal cammino che collega gli estremi



su $\forall \Gamma_K$ $W_{\Gamma_{K,AB}}$ è lo stesso!

Se $\vec F$ è costante <u>ovunque</u>

Questo si applica quindi direttamente al caso del PESO.



$$W_{\Gamma_{AB}} = \vec P \cdot (\vec r_B - \vec r_A) =$$

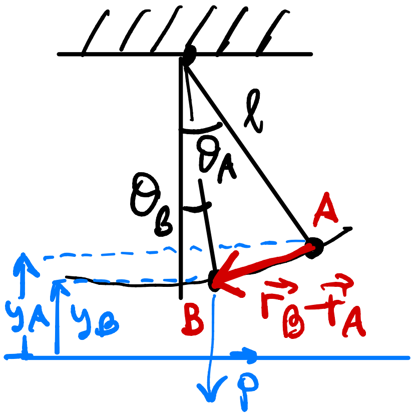
$$= -mgy_B - (-mgy_A) =$$

$$= mg(y_A - y_B) \lesseqgtr 0 \quad \text{se } y_A \lesseqgtr y_B$$

se scendo (salgo) $W > 0$ (< 0)

Gli spostamenti laterali NON CONTANO!

Questo argomento si applica ovviamente anche al pendolo (in riferimento al suo peso: la tensione NON lavora perché è sempre perpendicolare allo spostamento!)

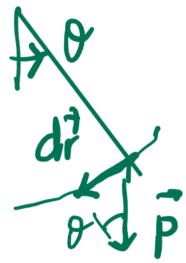


$$W_{AB}(\vec P) = \vec P \cdot (\vec r_B - \vec r_A) = mg(y_A - y_B);$$

$$y = \ell - \ell\cos\vartheta \quad \text{(dal punto di minima quota)}$$

$$\Rightarrow W_{AB}(\vec P) = mg\ell(\cos\vartheta_B - \cos\vartheta_A)$$

Che si può vedere anche così



$$\delta W = \vec P \cdot d\vec r = mg\,dr\sin\vartheta$$

e $dr = -\ell\, d\vartheta$

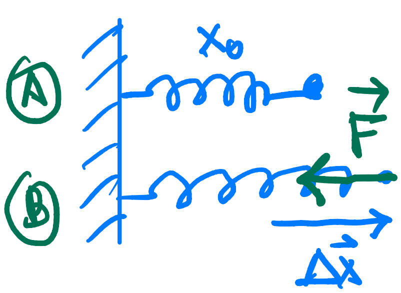
perché ϑ cresce antiorario e dr orario

$$\Rightarrow \delta W = -mg\ell\sin\vartheta\, d\vartheta = +mg\ell\, d(\cos\vartheta) \Rightarrow$$

$$W_{AB} = mg\ell\int_{\vartheta_A}^{\vartheta_B} d(\cos\vartheta) = mg\ell(\cos\vartheta_B - \cos\vartheta_A) \checkmark$$

Se la forza non è costante il conto può essere più complicato ma si usa comunque l'integrale di linea.

Caso della forza elastica (Hooke) $F = -k(x - x_0)$



$$W_{AB} = \int_A^B F\,dx = -k\int_{x_0}^{x}\underbrace{(x' - x_0)}_{z}\,dx' =$$

B → x, A → x_0

$z = x' - x_0$

$dz = dx'$

$$= -k\int_0^{x-x_0} z\,dz = -\frac{1}{2}k(x - x_0)^2 < 0 \quad \underline{\text{sempre}}$$

(la forza è contraria alla deformazione – spostamento)