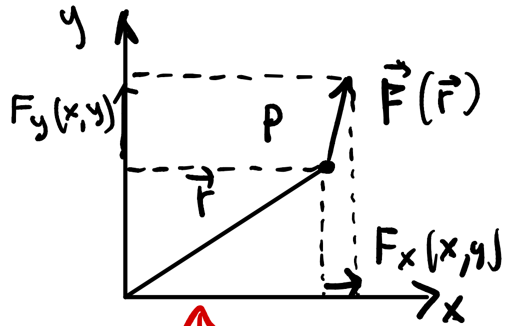
Caso più generale dei « CAMPI di FORZA » e della eventuale dipendenza del lavoro dal cammino seguito. → vettoriali in generale

Definizione di campo di forza $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$

che sono 3 funzioni del "posto"

$$\begin{cases} F_x = F_x(x,y,z) \\ F_y = F_y(x,y,z) \\ F_z = F_z(x,y,z) \end{cases}$$



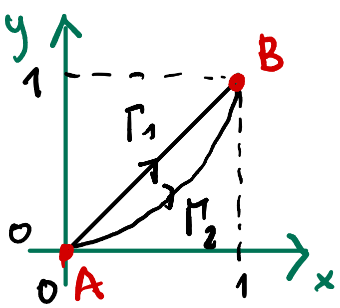
Studiamo l'esempio

$$\boxed{F_x = xy \;,\; F_y = x - y}$$

NB le dimensioni

si può pensare anche a un campo di velocità (più facile visualizzarlo)

Calcoliamo il lavoro associato a questo campo lungo due cammini



$$\Gamma_1: \begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases}, t \in [0,1] \Leftrightarrow y = x \quad (0 \le x \le 1)$$

$$\Gamma_2: \begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases}, t \in [0,1] \Leftrightarrow y = x^2 \quad (0 \le x \le 1)$$

└ rappresentazione PARAMETRICA dei cammini ┘

$$W_{\Gamma_{AB}} = \int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_\Gamma (F_x dx + F_y dy)$$

FORMA DIFFERENZIALE

$$\Big[= F_x \dot{x}\, dt + F_y \dot{y}\, dt = (F_x v_x + F_y v_y)\, dt = (\vec{F} \cdot \vec{v})\, dt \Big]$$

$$\Gamma_1: \begin{cases} F_x = x \cdot y = x^2 \\ F_y = x - y = 0 \end{cases}, dy = dx \Rightarrow \delta W = x^2 dx \Rightarrow W_{\Gamma_{AB_1}} = \int_0^1 x^2 dx = 1/3$$

$$\Gamma_2: \begin{cases} F_x = x \cdot y = x^3 \\ F_y = x - y = x - x^2 \end{cases}, dy = 2x\,dx \Rightarrow \delta W = x^3 dx + 2x(x - x^2)dx = (2x^2 - x^3)\,dx$$

$$\Rightarrow W_{\Gamma_{AB_2}} = \int_0^1 (2x^2 - x^3)\,dx = \frac{2}{3} - \frac{1}{4} = 5/12$$

I lavori sono DIFFERENTI!

Perchè tutto questo interesse per il lavoro e per come si calcola? Consideriamo anzitutto il teorema « lavoro – energia cinetica » noto anche come teorema delle « forze vive ».

Il conto è semplice:

$$\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{v} \cdot d\vec{p} = \frac{1}{m}\, \vec{p} \cdot d\vec{p}.$$

Inoltre $d(\vec{p} \cdot \vec{p}) = 2\vec{p} \cdot d\vec{p} = d(p^2)$ per cui

$$\vec{p} \cdot d\vec{p} = \frac{1}{2}\, d(p^2)$$ e quindi

$$\delta W = \frac{1}{2m}\, d(p^2)$$

Preso un qualsiasi cammino $\Gamma_{A \to B}$ integriamo nel senso curvilineo:

$$W_{\Gamma_{A \to B}} = \int_{\Gamma_{AB}} \delta W = \frac{1}{2m} \int_{\Gamma_{AB}} d(p^2) = \frac{1}{2m}(p_B^2 - p_A^2)$$

indipendentemente da QUEL PARTICOLARE cammino Γ che va da A a B: se si cambia Γ però cambia il valore sia di $W_{\Gamma_{A \to B}}$ che, ovviamente, quello di $(p_B^2 - p_A^2)/2m$.

Si introduce la grandezza $E_K \equiv \dfrac{p^2}{2m}$ per la quale risulta quindi

$$W_{\Gamma_{A \to B}} = E_{K_B} - E_{K_A} = \Delta E_{K_{AB}}:$$ E_K è l'energia cinetica della massa m con quantità di moto p.

Enunciato del teorema:

il lavoro fatto / subito da una forza risulta sempre uguale alla variazione dell'energia cinetica che ha la massa sotto l'azione della forza stessa.

NB: E_K è sempre positiva ma ΔE_K (la sua variazione) ha segno!
Inoltre si può scrivere (sempre per un punto materiale) che

$$E_K = \frac{p^2}{2m} = \frac{(mv)^2}{2m} = \frac{1}{2} m v^2$$

L'energia cinetica ha dimensione lavoro e si misura nel SI in J.

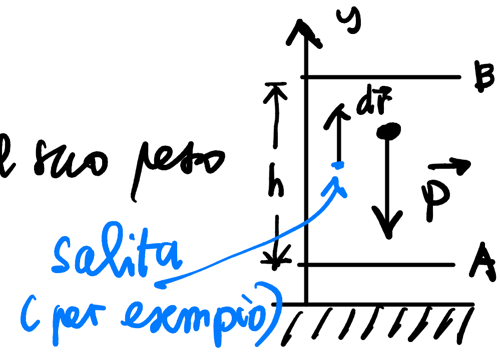
Tornando al confronto Huygens / Leibnitz vale la pena di formalizzarlo in questo modo:

$$\int \vec{F} \cdot dt = \vec{J} = \Delta \vec{p} \quad \text{(effetto temporale e vettoriale di } \vec{F}\text{)}$$

$$\int \vec{F} \cdot d\vec{r} = W = \Delta E_K \quad \text{(effetto spaziale e scalare di } \vec{F}\text{)}$$

È il momento di fare un po' di esempi.

Moto "verticale" di una massa sotto azione del suo peso



$$\delta W = \vec{P} \cdot d\vec{r} = -mg \cdot dy \; ; \; W_{AB} = \int_{y_A}^{y_B} (-mg\,dy) =$$
$$= mg(y_A - y_B)$$ come già discusso ($W_{AB} \gtrless 0$ se $y_A \gtrless y_B$)

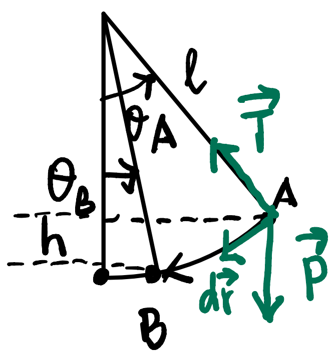
$$\Delta E_{K_{AB}} = \frac{p_B^2}{2m} - \frac{p_A^2}{2m} = mg(y_A - y_B) = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 \Rightarrow$$

$$v_B^2 = v_A^2 + 2g(y_A - y_B) = v_A^2 - 2gh \,, \quad h = y_B - y_A \gtrless 0$$ se $y_B \gtrless y_A$

se $y_B > y_A$ (salita) $\Rightarrow W_{AB} < 0 \Rightarrow v_B < v_A$ e viceversa.

Importante: siccome se la forza è costante il lavoro non dipende dal cammino ma solo dai suoi punti di partenza e di arrivo, allora anche la ΔE_K ha questa proprietà e, inoltre, se la forza è il PESO, in un riferimento allineato con esso il lavoro $\Rightarrow \Delta E_K$ dipende solo dalla differenza di quota per qualunque spostamento!

Moto del pendolo semplice



Abbiamo già calcolato

$$W_{AB} = mg(y_A - y_B) = mg\ell(\cos\vartheta_B - \cos\vartheta_A)$$

teorema lavoro - energia cinetica

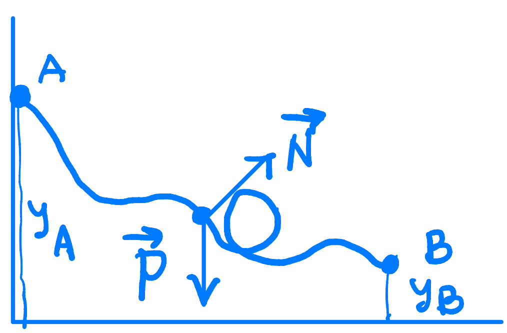
$$W_{AB} = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}v_A^2 \Rightarrow v_B^2 = v_A^2 + 2g\ell(\cos\vartheta_B - \cos\vartheta_A).$$

Per esempio, passaggio per la verticale $(\vartheta_B = 0)$ partendo da fermo, $v_A = 0 \Rightarrow$

$$v_B = \sqrt{2g\ell(1-\cos\vartheta_A)}$$

Come già ottenuto risolvendo l'equazione del moto (rivedere!). Qui «sembra» che non l'abbiamo usata: è "nascosta".

Questo ragionamento vale anche su qualsiasi "binario" o profilo curvo che non presenta attrito:

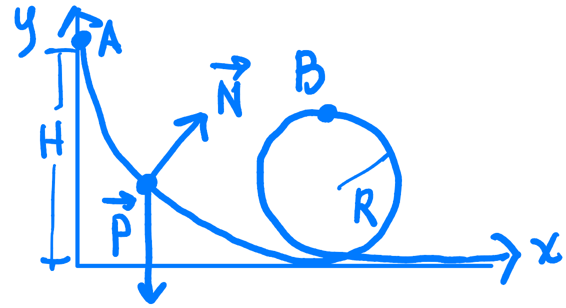


$$v_B = \sqrt{v_A^2 + 2g(y_A - y_B)}$$

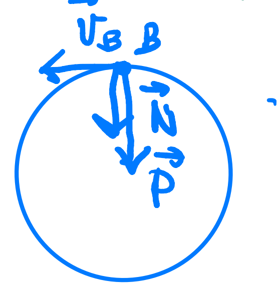
Se $v_A = 0$ deve essere $y_A \geq y_B$ (può solo scendere COMPLESSIVAMENTE)

$[\, y_A \geq y_B - v_A^2/2g$ in generale se $v_A \neq 0 \Rightarrow y_A < y_B$ risale! $]$

Esercizio del «giro della morte»



Partenza da fermo, $v_A = 0$, nel punto B [più alto del cerchio di raggio R] è $v_B = \sqrt{2g(H-2R)}$. Se $H \geq 2R$ è $v_B \geq 0$ ma questa non è condizione SUFFICIENTE per consentire la percorrenza del cerchio:



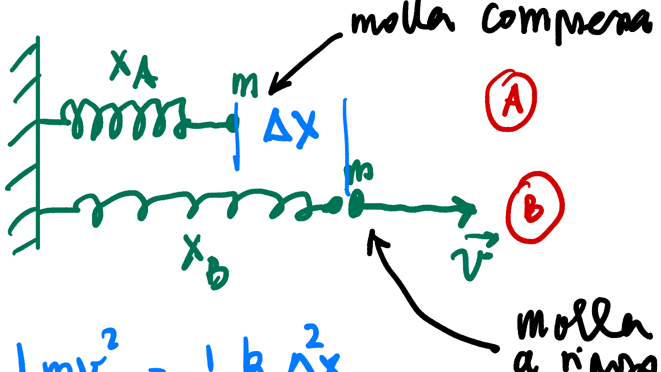
nel punto B il vincolo (se è unilaterale!) deve esprimere una reazione centripeta tale che

$$\frac{m v_B^2}{R} = N + P = N + mg \,, \quad N = \frac{m v_B^2}{R} - mg \geq 0$$

$$\Rightarrow \quad v_B^2 \geq gR \iff 2g(H-2R) \geq gR \iff H \geq 5R/2$$

Possiamo anche riprendere il caso della molla di Hooke per la quale si era calcolato il lavoro

Esempio: lancio di m con un elastico (fionda) o la biglia del flipper



Qui $W_{AB} > 0$ perché $\vec F$ e $d\vec x$ sono paralleli e la molla viene "liberata"!

$$\Delta E_K = \frac{1}{2} m v_{(B)}^2 = \frac{1}{2} k \Delta x^2$$

$$\Rightarrow \quad v_{(B)} = \sqrt{\frac{k}{m}}\, \Delta x$$