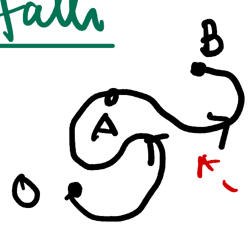
Verso la conservatività.

Grazie al teorema lavoro-energia cinetica si capisce che sapere (come) calcolare il lavoro fatto da una forza lungo un cammino è utilissimo perché permette di ottenere, in termini di energia cinetica, la variazione di velocità provocata dalla azione della forza lungo il cammino stesso.

Ovviamente questo calcolo è estremamente semplificato se il lavoro NON DIPENDE DAL CAMMINO! In questo caso vediamo matematicamente che deve esistere una "funzione del posto" $V(\vec{r})$ tale che risulta

$$W_{AB} = V(\vec{r}_B) - V(\vec{r}_A) \equiv V(B) - V(A) = \Delta V_{AB}.$$

Infatti



Si supponga che W_{AB} non dipenda dal cammino ma solo da A e B,

$$W_{AB} = W(A,B).$$

Quindi, preso un qualsiasi altro punto arbitrario O, vale

$$W_{OA} = W(O,A)$$
$$W_{OB} = W(O,B) = W(O,A) + W(A,B) \quad (\text{dal disegno})$$

$$\Rightarrow \quad W(A,B) = W_{OB} - W_{OA} = W(O,B) - W(O,A) \equiv V(B) - V(A)$$

pur di prendere $V(X) = W(O,X)$ con O arbitrario: QED

Per esempio, se $\vec{F}$ = costante $\Rightarrow$ $W_{AB} = \int_{\forall \Gamma_{AB}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot \vec{r}_B - \vec{F} \cdot \vec{r}_A =$

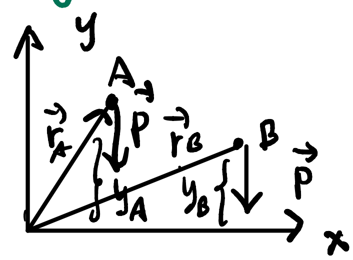
$= V(B) - V(A)$ con $V(\vec{r}) = \vec{F} \cdot \vec{r}$ (+ costante arbitraria)

La FUNZIONE del POSTO SCALARE $V(\vec{r})$ si chiama POTENZIALE del CAMPO $\vec{F}$ (definito a meno di una costante arbitraria additiva) e si misura in joule nel SI : da non confondersi con il potenziale elettrostatico che NON è un'energia (ma lo è per unità di carica).

Caso della forza peso al suolo (che NON è la gravitazione universale in generale) : $\vec{F} = m\vec{g}$

$$W_{AB} = \vec{P}\cdot\Delta\vec{r}_{AB} = m\vec{g}\cdot(\vec{r}_B - \vec{r}_A) = m\vec{g}\cdot\vec{r}_B - m\vec{g}\cdot\vec{r}_A \equiv V(\vec{r}_B) - V(\vec{r}_A)$$

$$\Rightarrow \quad V(\vec{r}) = m\vec{g}\cdot\vec{r} + \text{cost}$$



riferimento cartesiano con $\vec{g} = -g\hat{j}$

$$\Rightarrow \quad V(\vec{r}) = V(y) = -mgy + \text{cost}$$ (indipendente da x)

infatti torna con quello che avevamo già scritto :

$$W_{AB} = mg(y_A - y_B) = -mg(y_B - y_A) = V_B - V_A$$

La funzione potenziale esiste ⟺ ha senso se e solamente se il lavoro è indipendente dal cammino (il caso di forze costanti è solo un esempio!).

I campi di forze con lavoro indipendente dal cammino, ovvero che "possiedono" un potenziale, sono detti CONSERVATIVI.

I campi $\overrightarrow{\text{costanti}}$ (uniformi) sono conservativi, ma non tutti i campi conservativi sono $\overrightarrow{\text{costanti}}$!

Uniformità è condizione SUFFICIENTE ma NON NECESSARIA per la CONSERVATIVITÀ

Più formalmente diremo che $\vec{F}$ è un campo vettoriale conservativo se c'è un campo scalare $V(\vec{r})$ per il quale si può scrivere

$$\Delta V = W \quad e, \text{ in forma differenziale, } \quad dV = \delta W$$

L'esattezza del differenziale dV (o, meglio, la non-esattezza di δW) è il criterio matematico che permette di svolgere e calcolare l'integrale di cammino come un qualunque integrale.

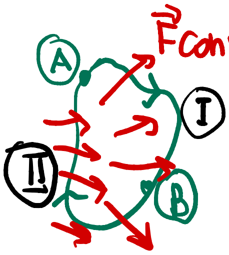
È importante anche osservare che « l'integrale di δW » non è una VARIAZIONE di "qualcosa" IN GENERALE e, infatti, si scrive $W = \int \delta W$ e ΔW NON HA SENSO. PERÒ, se $\vec{F}$ è un campo conservativo, allora vale $W = \Delta V$ e, solo in questo caso, il lavoro si calcola (non "è") come differenza di valori (del potenziale).

È anche bene sapere che TUTTI i CAMPI CONSERVATIVI sono STAZIONARI (nel tempo) ma NON VALE IL CONTRARIO: ci sono infatti campi stazionari che NON SONO CONSERVATIVI.

Un criterio (più formale di quanto forse non sembri) perchè un campo $\vec{F}$ si conservativo è che la sua CIRCUITAZIONE (integrale di cammino CHIUSO) si annulli per QUALUNQUE PERCORSO SCELTO. Si scrive

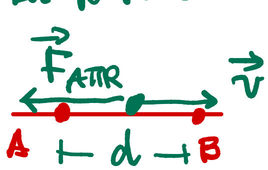
$$\int_{\substack{\text{qualunque } \Gamma \\ \text{chiuso}}} \vec{F} \cdot d\vec{r} \equiv \oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

e si vede che questo infatti equivale a dichiarare la indipendenza del lavoro dal cammino:

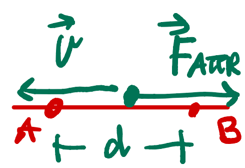


$$\vec{F}\ \text{conservativo} \Rightarrow \int_{AB_{I}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{AB_{II}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_{BA_{II}} \vec{F} \cdot d\vec{r} \Rightarrow \int_{AB_{I}} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{BA_{II}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

La forza d'attrito dinamica NON È conservativa ⇔ non ha potenziale:



$W_{AB} = -F_{ATTR} \cdot d$



$W_{BA} = -F_{ATTR} \cdot d$

$W_{\oint} = -2 F_{ATTR} \cdot d \neq 0$

Adesso è possibile formalizzare la condizione di conservatività di un campo di forza unendo il teorema lavoro-energia cinetica e l'indipendenza del lavoro dal cammino considerato.
Per farlo si introduce l'OPPOSTO del POTENZIALE, $-V(\vec{r})$, che è una funzione del posto [definita a meno di una costante arbitraria additiva]:

$$U(\vec{r}) = -V(\vec{r})$$

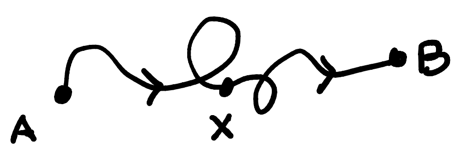
che esiste / ha senso SOLO in caso di forze conservative: si misura nel SI in joule ed è detta ENERGIA POTENZIALE del campo $\vec{F}$.

Si scrive subito $$W_{AB} = \Delta V_{AB} = -\Delta U_{AB} = U(A) - U(B)$$
[perché $\vec{F}$ è conservativa]

$$W_{AB} = \Delta E_{K_{AB}} = E_K(B) - E_K(A)$$
[sempre valida]

$$\Rightarrow U(A) - U(B) = E_K(B) - E_K(A) \iff U(A) + E_K(A) = U(B) + E_K(B)$$

ovvero la quantità $E \equiv U + E_K$ non varia qualunque cosa accada sotto l'azione della forza conservativa. E è l'energia [meccanica] totale della massa che stiamo studiando



$$E_A = E_B = E_X = \dots$$

Si può anche dire che l'energia meccanica è conservata durante la storia del punto.
Se la forza agisce producendo lavoro positivo $\iff$ l'energia potenziale diminuisce $\Rightarrow$ l'energia cinetica aumenta. E viceversa.

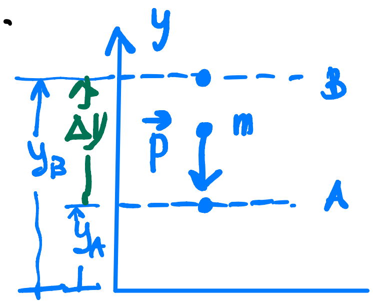
È possibile pensare a E come a una "riserva fissa" (definita a meno di una costante arbitraria) dal quale E_K/U attingono sempre mantenendo costante la loro somma.

Caso della forza peso: è costante → è conservativa: $U(\vec{r}) = -\vec{P}\cdot\vec{r} + \text{cost}$

Abbiamo già ottenuto nel riferimento cartesiano con $\vec{P} = -mg\hat{j}$ che

$$V = V(y) = -mgy + \text{cost} \Rightarrow U = U(y) = mgy + \text{costante}$$

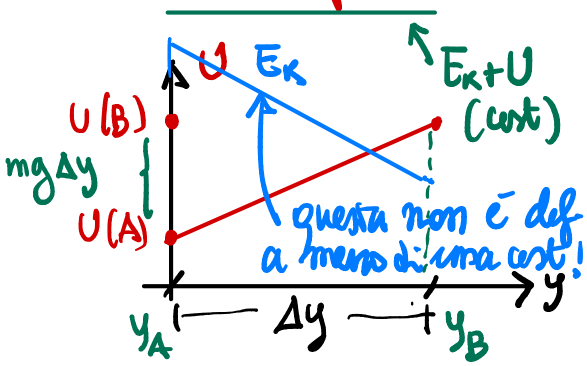
Ci si aspetta allora che se m sale ⇒ U aumenta ⇒ E_K diminuisce
PARLANDO SOLO DELL'EFFETTO DELLA FORZA PESO.



y	U	E_K	$E = E_K + U$
y_A	mgy_A	$\frac{1}{2}mv_A^2$	$mgy_A + \frac{1}{2}mv_A^2$ ← uguali in qualunque posizione
y_B	mgy_B	$\frac{1}{2}mv_B^2$	$mgy_B + \frac{1}{2}mv_B^2$ ←

$$mgy_A + \frac{1}{2}mv_A^2 = mgy_B + \frac{1}{2}mv_B^2 \Rightarrow v_B = \sqrt{v_A^2 - 2g(y_B - y_A)} = \sqrt{v_A^2 - 2g\Delta y}$$

NB: non si è fatto uso dell'equazione del moto [non c'è traccia del tempo]



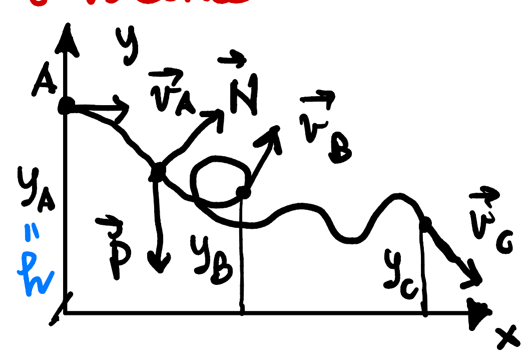
Servono le condizioni iniziali. Per esempio,
se $v(y = y_A) = v_A \Rightarrow E = \frac{1}{2}mv_A^2 + U(A) = \text{cost}$

In qualsiasi posizione $\frac{1}{2}mv^2(y) = \frac{1}{2}mv_A^2 + U(A) - U(y)$

$$\Rightarrow v_y^2 = v_A^2 - 2g(y - y_A)$$

Si vede che aggiungere/togliere un qualsiasi numero a E (U) non cambia il risultato.

Utile anche ragionare energeticamente con l'8-volante LISCIO



E = costante perché $\vec{P}$ è costante e $\vec{N}$ non lavora

Per esempio partenza da fermo $E = mgy_A = mgh$

⇒ in ogni punto $v(y) = \sqrt{2g(h-y)}$ per cui deve essere $y \leq h$

[se si prende $y_A = 0$ ⇒ $v(y) = \sqrt{-2gy} \Rightarrow y \leq 0$]

Poi ci torniamo