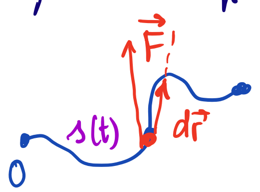
Curve dell'energia potenziale

A partire dalla $F_x dx = dW = -dU$ (in una dimensione x) si ottiene che

$$F_x = -\frac{dU}{dx}$$

Si generalizza nel caso di moto curvo su una traiettoria assegnata per la quale è sufficiente la sola coordinata curvilinea /stradale $s = s(t)$:



$$\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F_{\parallel}\, ds = -dU$$

$$\Rightarrow \quad F_{\parallel} = -\frac{dU}{ds} \quad e \quad \vec{F}_{\parallel} = -\frac{dU}{ds}\hat{s}$$

È possibile studiare la funzione $U(s)$ nel bilancio energetico

$$\frac{1}{2}mv^2 + U = \frac{1}{2}m\dot{s}^2 + U(s) = E = \text{costante}$$

per cui

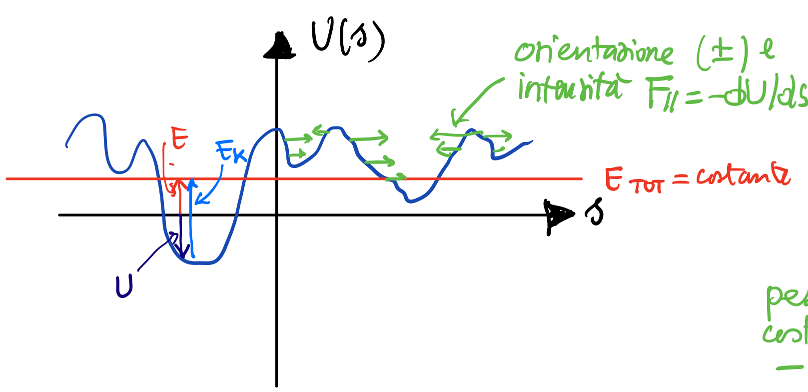
$$\dot{s} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - U(s)\right]}$$

che è l'equazione differenziale scalare che fornisce la legge oraria $s(t)$ via integrazione.

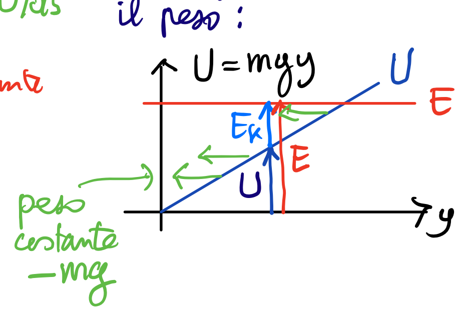
NB attenzione alle dimensioni nella relazione $F_{\parallel} = -dU/ds$: per esempio, nel caso del pendolo semplice, $s = \ell\theta$ e dunque

$$F_{\parallel} = -\frac{1}{\ell}\frac{dU}{d\theta}.$$

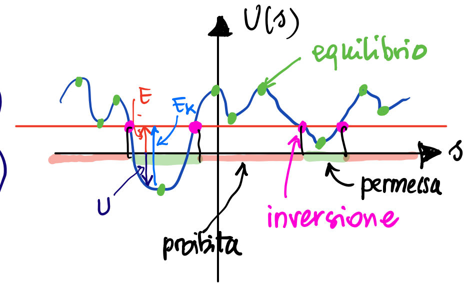
Studio grafico della curva $U(s)$: si utilizza la $E_K = E - U$



Caso già visto per il peso:

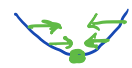
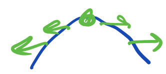
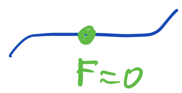


Si individuano i punti:



- di inversione del moto ($E_K = 0 \Leftrightarrow E = U$)
- di equilibrio ($F_{\parallel} = 0 \Leftrightarrow \frac{dU}{ds} = 0$)
- zone permesse/proibite ($E_K \gtrless 0$)

I punti di equilibrio sono classificati in tre famiglie:

- stabili (minimo di U(s))  ← $\vec{F}$ di richiamo
- instabili (massimo di U(s))  ← $\vec{F}$ di allontanamento
- indifferente (U è costante)  ← $\vec{F}$ nulla

Integrazione esplicita dell'energia per il pendolo semplice:

$U(s) = mgl(1-\cos\theta)$ con energia totale, per esempio, data da $v_0 = 0$, $\theta(t=0) = \theta_0$

$$E = \frac{1}{2}mv_0^2 + U(\theta_0) = mgl(1-\cos\theta_0).$$

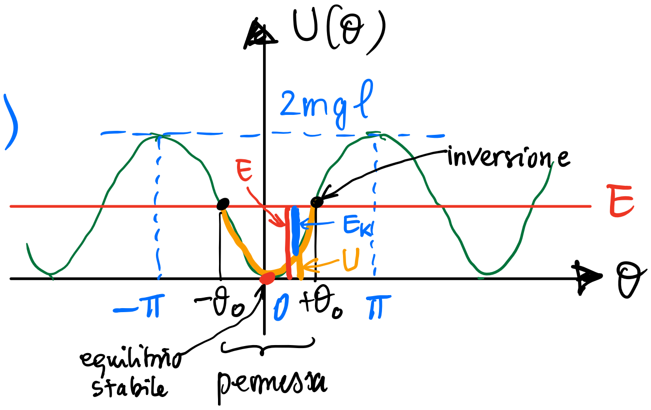
L'integrale da fare è $\displaystyle\int_{s_0}^{s} \frac{ds}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-U)}} = l\int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta'}{\sqrt{\frac{2}{m}\cdot mgl(\cos\theta' - \cos\theta_0)}} =$

$= \displaystyle\sqrt{\frac{l}{2g}} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta'}{\sqrt{\cos\theta' - \cos\theta_0}}$ che è un integrale ellittico.

È risolubile esattamente per piccoli angoli, $\cos\theta \approx 1 - \theta^2/2$, nel qual caso l'integrale è della forma $\frac{1}{\sqrt{A-x^2}}$, con primitiva $\sin^{-1}$ ⇒ legge oraria dell'oscillatore armonico.

La curva dell'energia del pendolo (già vista) può essere studiata con queste tecniche:

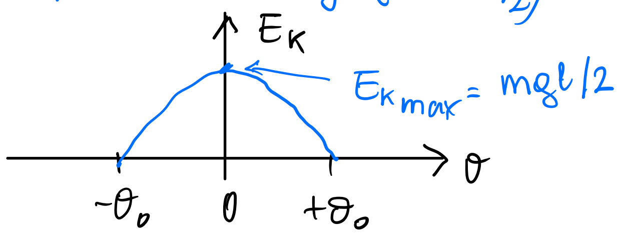
$U = mg\ell(1-\cos\vartheta)$



Esempio esplicito : $v_0 = 0,\ \vartheta_0 = \pi/3 \Rightarrow$

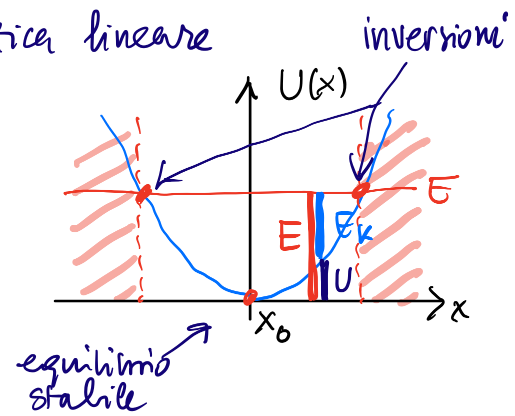
$$E = mg\ell(1-\cos\vartheta_0) = mg\ell/2$$

$$\Rightarrow \quad E_K = E - U = mg\ell\,(\cos\vartheta - 1/2)$$



Curva dell'energia di una forza elastica lineare

$$V(x) = -\frac{1}{2}k(x-x_0)^2 \Rightarrow U(x) = \frac{1}{2}k(x-x_0)^2$$



Anche questa energia potenziale conduce a un'equazione differenziale esatta per la legge oraria del tipo armonico semplice.

NB Qualsiasi curva con un minimo è localmente approssimabile con una parabola e quindi rappresenta meccanicamente un oscillatore armonico:

$$f(x) \approx \frac{(x-x_0)^2}{2} f''(x_0)$$