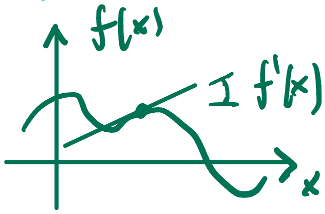
Quale la relazione tra il campo vettoriale $\vec{F}$ e l'energia potenziale ? In una sola coordinata vale che $F_x = -\frac{dU}{dx}$ $\left(= \frac{dV}{dx}\right)$.

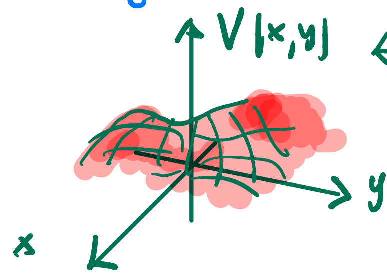
Restiamo per comodità in 2 dimensioni e partiamo dalla forma differenziale già considerata :

$$dV = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F_x\, dx + F_y\, dy$$

questa è "esatta" perché $\vec{F}$ è un campo conservativo!

Breve interludio matematico : si può estendere l'idea di pendenza della retta tangente [$f'(x)$] in più dimensioni ?





← chiamiamola così per portarci avanti.

Potrebbe essere la quota del terreno su una mappa !

Nel caso $V(x,y)$ ci sono "infinite pendenze", a seconda della direzione in cui le si misurano.

Si definisce a questo scopo una DERIVATA "DIREZIONALE" della superficie $V(x,y)$ in direzione $\hat{u}$ in questo modo:

$$D_{\hat{u}} V \equiv \frac{\partial V}{\partial x} u_x + \frac{\partial V}{\partial y} u_y$$

dove si usano le DERIVATE PARZIALI di $V(x,y)$: se per esempio

$$V(x,y) = 3x^3 - 4xy^2 \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial x} = 9x^2 - 4y^2, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = -8xy$$

Questa definizione «estende» la $df = \frac{df}{dx} dx$!

Va letta come il PRODOTTO INTERNO TRA I DUE VETTORI

$$\hat{u} \equiv (u_x, u_y) \quad , \quad \left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}\right) \equiv \vec{\text{grad}}\, V \quad (\vec{\nabla} V)$$

$$\Rightarrow \quad D_{\hat{u}} V = \vec{\nabla} V \cdot \hat{u}$$

[NOTARE CHE $D_{\hat{\imath}} V = \frac{\partial V}{\partial x}$, $D_{\hat{\jmath}} V = \frac{\partial V}{\partial y}$]

Osservazione "geometrica": dalla sua definizione, $D_{\hat{u}} V$ è massima (la più ripida pendenza) nella direzione del gradiente di V ed ha valore pari proprio a quello del gradiente.

Il gradiente misura direzione e intensità della massima pendenza della superficie $V(x,y)$!

Torniamo ai nostri campi di forza e confrontiamo le espressioni:

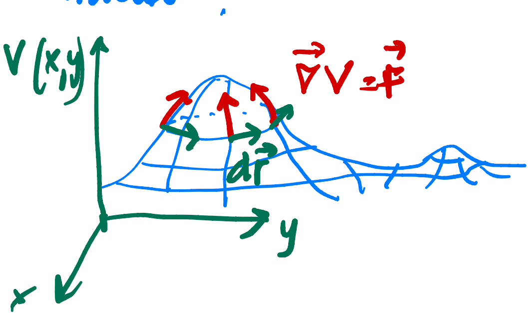
$$\begin{aligned} \delta W &= F_x\,dx + F_y\,dy = \vec{F}\cdot d\vec{r} \\ \| \\ dV &= \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy = \vec{\nabla} V \cdot d\vec{r} \end{aligned}$$

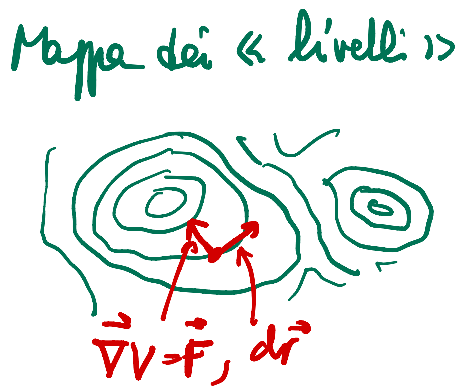
sono la stessa relazione pur di prendere

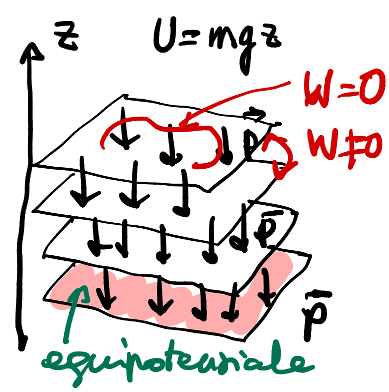
$$\vec{F} = \vec{\nabla} V$$

che generalizza la $F_x = \frac{dV}{dx}$: il campo di forza vettoriale è assegnato dal gradiente del potenziale (o da $-\vec{\nabla} U$) che è il vettore di massima pendenza del campo scalare V (o U).

Si vede allora che muovendosi perpendicolarmente al gradiente ($d\vec{r} \perp \vec{\nabla} U \Leftrightarrow d\vec{r} \perp \vec{F}$) il lavoro è nullo.







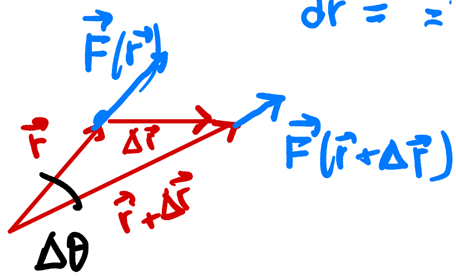
I livelli sono a potenziale (quota) costante e lungo di essi la forza non compie lavoro. Si parla di linee / superfici equipotenziali: il gradiente è perpendicolare ai livelli!

Discorso dell'energia (potenziale) associata al campo di gravitazione universale di Newton.

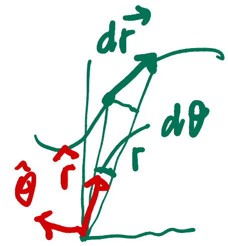
Anzitutto: è un campo conservativo perché <u>radiale</u> e posizionale:

se $\vec{F} = -G\frac{mM}{r^2}\hat{r} \Rightarrow \delta W = \vec{F}\cdot d\vec{r} = -GmM\frac{dr}{r^2}$ perché

$$d\vec{r} = dr\,\hat{r} + r\,d\theta\,\hat{\theta}$$



Intuitivamente: $\vec{F}$ lavora solo nel tratto radiale: lo spostamento trasversale non dà contributo. Quindi si può subito determinare il potenziale (ovvero l'energia potenziale $U=-V$):



$$\Delta U = -\Delta V = -\int_{r_A}^{r_B}\vec{F}\cdot d\vec{r} = GmM\int_{r_A}^{r_B}\frac{dr}{r^2} = -GmM\left(\frac{1}{r_B}-\frac{1}{r_A}\right) =$$

$$= U(r_B) - U(r_A) \Rightarrow U(r) = -\frac{GmM}{r} + \text{costante}$$

Di solito si pone $U(\infty) = \text{costante} = 0 \Rightarrow U(r) = -\frac{GmM}{r}$

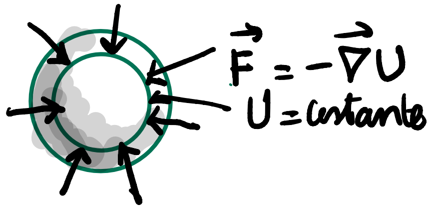
Essendo $W(\infty\to r) = -\Delta U_{\infty\to r} = U(\infty) - U(r) = \frac{GmM}{r}$ allora $-U(r) = +\frac{GmM}{r}$ è il lavoro che la forza gravitazionale compie quando m «cade» da distanza infinita a distanza r dalla massa M.

Il conto in generale torna perché

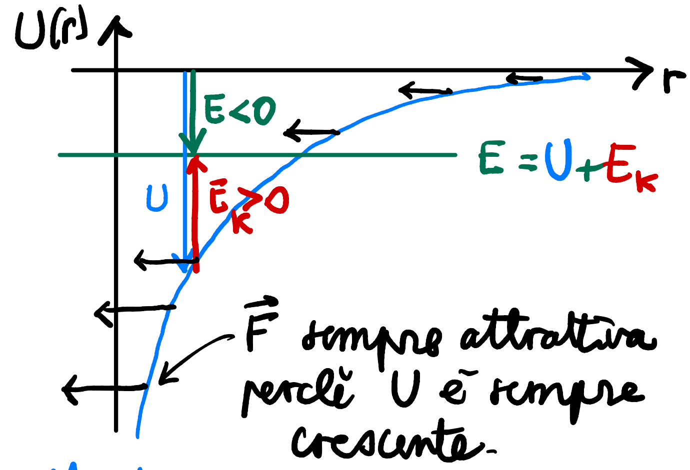
$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U = -\frac{dU}{dr}\hat{r} = -\frac{GmM}{r^2}\hat{r}$$

[Attenzione, in generale $\vec{\nabla} = \hat{r}\frac{\partial}{\partial r} + \hat{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}$]

Per la forza newtoniana (o qualunque altra radiale) le superfici equipotenziali sono sfere concentriche attorno a $r=0$:

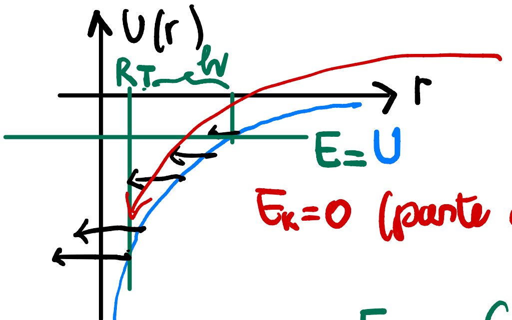


$\vec{F}$ lavora solo cambiando r (guscio) mentre non lavora sulla superficie ($r=$cost).



Studiamo l'energia potenziale gravitazionale newtoniana

Studiamo per esempio la caduta "libera" della massa m sulla massa M a partire dalla quota h usando la curva $U(r)$.



F aumenta (non è il "peso" costante)!

$$E = -\frac{GmM}{R_T+h} = \frac{1}{2} m v_F^2 - \frac{GmM}{R_T}$$

v_F: velocità di arrivo al suolo

$$\Rightarrow \quad v_F = \sqrt{2GM\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{R_T+h}\right)} = \sqrt{\frac{2GM}{R_T}\left(1 - \frac{R_T}{R_T+h}\right)} = \sqrt{\frac{2GM}{R_T}\left(1 - \frac{1}{1+h/R_T}\right)} \approx$$

$$\underset{h \ll R_T}{\approx} \sqrt{\frac{2GM}{R_T}\cdot\left[1-\left(1-\frac{h}{R_T}\right)\right]} = \sqrt{\frac{2GM}{R_T}\,\frac{h}{R_T}} = \sqrt{\underbrace{\frac{2GM}{R_T^2}}_{g}\,h} = \sqrt{2gh}$$

torna con il caso di peso costante se $h \ll R_T$.