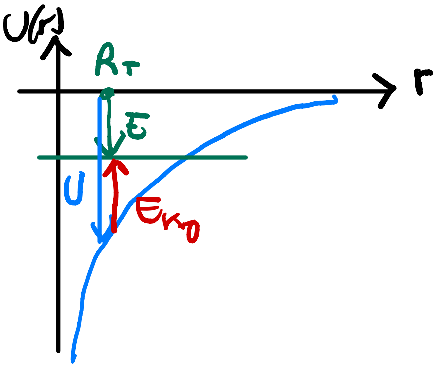
Caso del lancio verticale di m nel campo di M con velocità iniziale v_0



In generale: $\frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GmM}{R_T} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GmM}{R_T+h}$

$$\Rightarrow v = \sqrt{v_0^2 - 2GM\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{R_T+h}\right)} = \sqrt{v_0^2 - \frac{2GM}{R_T^2}\frac{hR_T}{R_T+h}} = \sqrt{v_0^2 - 2gh\frac{R_T}{R_T+h}}$$

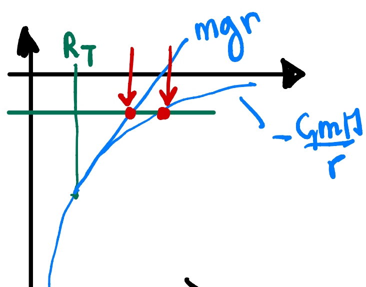
$\frac{R_T+h-\cancel{R_T}}{R_T(R_T+h)}$

esatta

$v \approx \sqrt{v_0^2 - 2gh}$ se $h \ll R_T$ (torna con il caso di peso costante)

Se l'attrazione è quella newtoniana (che diminuisce con la distanza) ci si aspetta che, a parità di v_0, la quota raggiunta sia maggiore!

Questo lo si apprezza anche dal confronto tra le curve potenziali:



$$v^2 = 0 = v_0^2 - 2g\,h_{max}\frac{R_T}{R_T+h_{max}} \Rightarrow$$

$$R_T \cdot \frac{h_{max}}{R_T+h_{max}} = \frac{v_0^2}{2g} = h^0_{max}$$ quota max se c'è g costante

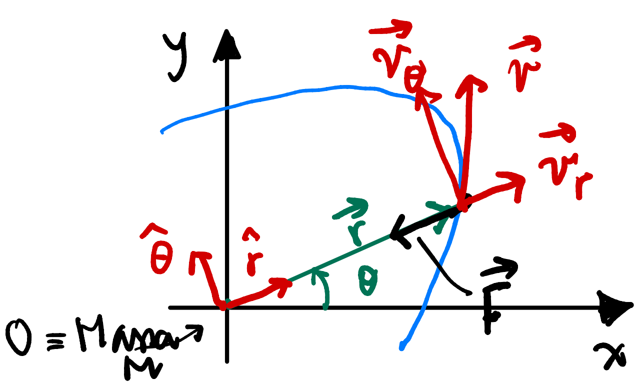
$$\Rightarrow R_T h_{max} = h^0_{max}(R_T + h_{max}) \Leftrightarrow h_{max}(R_T - h^0_{max}) = h^0_{max} R_T$$

$$\Rightarrow h_{max} = \frac{h^0_{max} R_T}{R_T - h^0_{max}} = \frac{h^0_{max}}{1 - h^0_{max}/R_T} > h^0_{max}$$

velocità di fuga

Inoltre $h_{max} \longrightarrow \infty$ se $h^0_{max} = R_T \Leftrightarrow v_0 = \sqrt{2gR_T} \cong 1{,}1 \times 10^4\ m/s$

È infine importante descrivere energeticamente il moto di una massa in rappresentazione polare, come succede nel caso di orbite planetarie [ma anche altri casi di studio].



Partiamo dall'energia cinetica:

$\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$ e

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2$$

$E_{k,rad}$ $E_{k,rot}$

In generale.

Conservazione dell'energia:

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + U(r,\theta) = \text{costante}.$$

Esempio di forza centrale newtoniana $U = U(r) = -\,{}^{GMm}/_{r}$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\underset{\dot{\theta}^2}{\underset{\uparrow}{\omega^2}} - \frac{GmM}{r} = \text{costante}$$

Conviene ridurre il problema alla dipendenza solo radiale: è possibile perché vale la conservazione [anche] del momento angolare, ovvero le variazioni di r e ω sono dipendenti, a partire dalla

$$\vec{L}_0 = \vec{r} \times \vec{p} = m\vec{r} \times (\vec{v}_r + \vec{v}_\theta) = m\vec{r} \times \vec{v}_\theta = mr^2\dot{\theta}\,\hat{k}$$

$$\Rightarrow \quad mr^2\omega \underset{\vec{\tau}_0 = \vec{0}, \text{ radiale!}}{\underset{\uparrow}{=}} L_0 \ (\text{costante}) \quad e \quad \omega = \frac{L_0}{mr^2}, \quad \omega^2 = \frac{L_0^2}{m^2r^4}$$

$$\Rightarrow \quad E_{k\,rot} = \frac{1}{2}mr^2\omega^2 = \frac{1}{2}mr^2 \cdot \frac{L_0^2}{m^2r^4} = \frac{L_0^2}{2mr^2}$$

Dunque il contributo rotazionale all'energia cinetica può essere scritto come un'energia puramente posizionale (radiale).

Osserviamo che

$$-\frac{dE_{k,rot}}{dr} = \frac{L_0^2}{mr^3} = \frac{m^2r^4\omega^2}{mr^3} = mr\omega^2$$

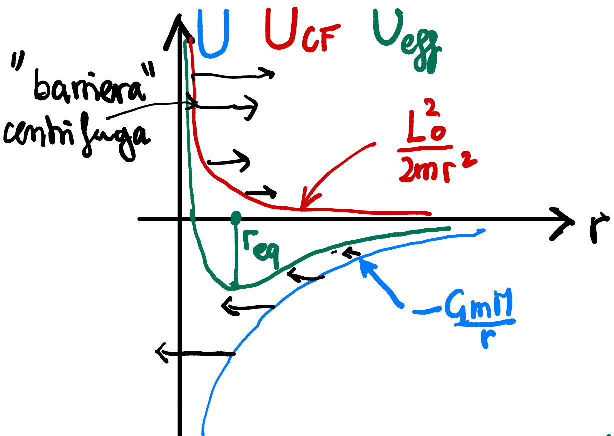
$\Rightarrow$ c'è una forza associata a questa energia, $\vec{F}_{CF} = -\frac{dE_{k,rot}}{dr}\hat{r} = mr\omega^2\hat{r}$

Si può pensare che siamo nel riferimento non-inerziale che vede la massa m con moti solo radiali (ed è dunque soggetta a forza centrifuga) e vale la nuova scrittura dell'energia meccanica,

$$E = E_{k_{rad}} + E_{k_{rot}} + U = E_{k_{rad}} + U_{eff}(r)$$

con l'energia potenziale EFFICACE $U_{eff}(r) = \frac{L_0^2}{2mr^2} - \frac{GmM}{r}$.

Tutto rientra nel moto SOLAMENTE RADIALE sotto la curva energetica effettiva [radiale «vera» più centrifuga]

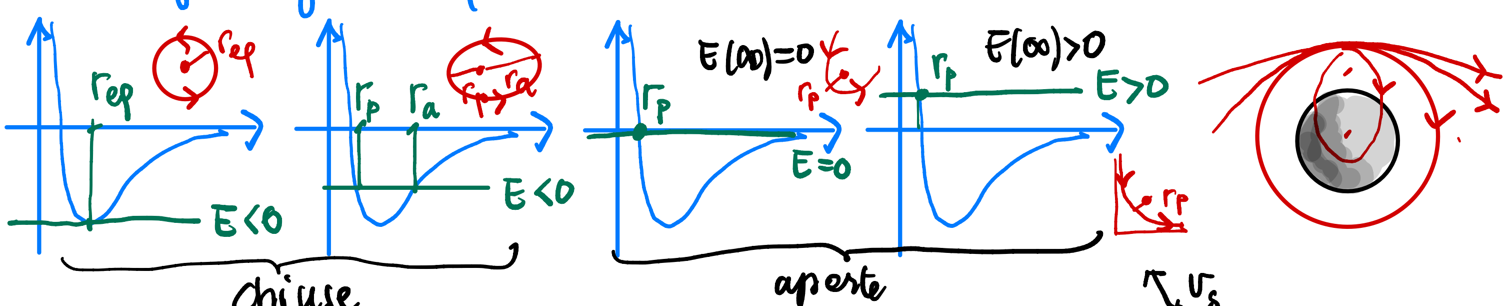


La curva U_{eff} ha un "punto" di equilibrio [solo radiale!] che è stabile [radialmente]:

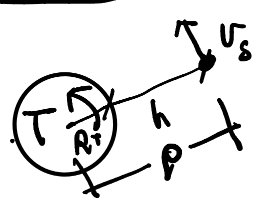
$$\frac{dU_{eff}}{dr} = -\frac{L_0^2}{mr^3} + \frac{GmM}{r^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{L_0^2}{mr_{eq}} = GmM \Leftrightarrow r_{eq} = \frac{L_0^2}{Gm^2M}$$

Ci sono 4 famiglie di possibili orbite:



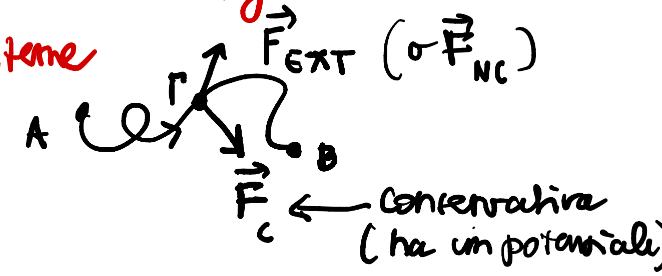
C'è anche il caso del satellite geostazionario:



$$T_s = \frac{2\pi}{\omega_s} = \frac{2\pi\rho}{v_s} ; \frac{GmM}{\rho^2} = \frac{mv_s^2}{\rho} \Rightarrow v_s = \sqrt{\frac{GM}{\rho}}$$

$$\Rightarrow 2\pi\rho\cdot\sqrt{\frac{\rho}{GM}} = 2\pi\sqrt{\frac{\rho^3}{GM}} = T_T \Rightarrow \rho^3 = \frac{T_T^2\cdot GM}{4\pi^2} \Rightarrow \rho = \sqrt[3]{\frac{T_T^2\,GM}{4\pi^2}} \simeq 42 \text{ km}$$

Si può fare anche un semplice bilancio energetico in presenza di forze non conservative/esterne



Basta scrivere, a partire dal teorema lavoro–energia cinetica, indicando $W_C = \int_{\Gamma_{AB}} \vec{F}_C \cdot d\vec{r}$, $W_{NC} = \int_{\Gamma_{AB}} \vec{F}_{NC} \cdot d\vec{r}$, che $W_{AB} = W_C + \underset{(ext)}{W_{NC}}$

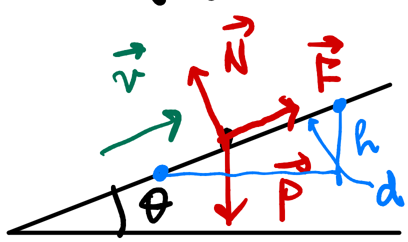
e inoltre, per la conservatività di $\vec{F}_C$, $W_C = -\Delta U$

e $W_{AB} = \Delta E_{K_{AB}}$ $\Rightarrow$ $\Delta E_{K_{AB}} + \Delta U = \underset{(ext)}{W_{NC}} \neq 0$

cioè l'energia meccanica varia per l'apporto/sottrazione di lavoro non-conservativo/oppure "esterno" al sistema.

Due esempi

(a) salita lungo un piano inclinato con $\vec{v}$ = costante sotto l'azione della forza (del motore) $\vec{F}$ il cui lavoro dipende in generale



non solo dallo spostamento (come per la forza peso – costante → conservativa) ma anche da come opera il motore (se a velocità costante, oppure no, per esempio)

L'energia cinetica non cambia ($\vec{v}$ = costante) $\Leftrightarrow$ $\Delta E_K = 0$;

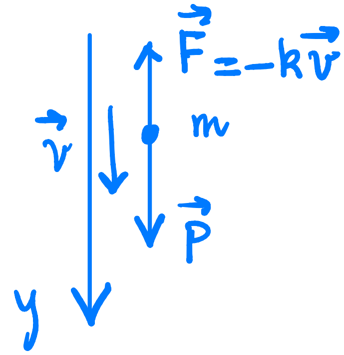
l'energia potenziale associata al peso aumenta di

$mgh = mgd \operatorname{sen}\theta$

Quindi $\Delta E = \Delta E_K + \Delta U = mgd \operatorname{sen}\theta = W_F$

Notiamo che F lavora proprio per l'ammontare $F \cdot d = mgd \sin\theta$ con $F = mg \operatorname{sen}\theta$ [perché in questo esempio $\vec{F}$ deve risultare costante per avere $\vec{v}$ = costante]

(b) Caduta di una massa in un fluido secondo il modello viscoso di Stokes



La soluzione oraria dell'equazione del moto era

$$v(t) = v_L(1 - e^{-\beta t}), \quad v_0 = 0 \quad \beta = \frac{k}{m}$$

$$v_L = g/\beta = mg/k$$

e $\quad a(t) = g e^{-\beta t}$

Calcoliamo l'energia meccanica (cinetica e gravitazionale)

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - mgy \ ;$$

osserviamo che $\dfrac{dE}{dt} = mva - mgv = mv(a-g) =$

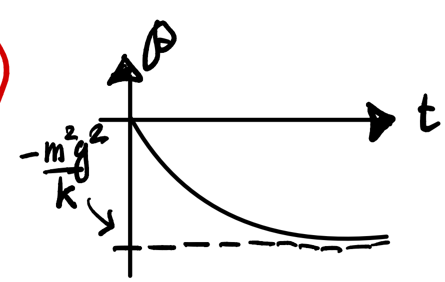
$$= mvg\underbrace{(e^{-\beta t} - 1)}_{v/v_L} = -mvg \cdot \frac{v}{v_L} = -mg \cdot v^2 \cdot \frac{k}{mg} = -kv^2 < 0$$

diminuisce!

Questa espressione mostra che E non è costante nel tempo (come ci si aspetta per un punto che tende a velocità costante muovendosi verticalmente in un campo gravitazionale: U diminuisce, E_K non cambia, se si aspetta $t \gg 1/\beta$).

Il modello fornisce un'espressione esplicita per la POTENZA messa in gioco dall'attrito viscoso:

$$\mathcal{P} = \frac{dE}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} = -kv^2 \quad \text{(in watt)}$$



con limite $\quad \mathcal{P} \xrightarrow[t\to\infty]{} -kv_L^2 = -\dfrac{m^2g^2}{k} < 0$