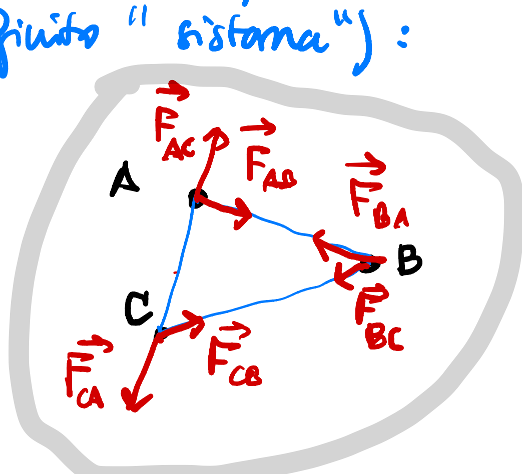
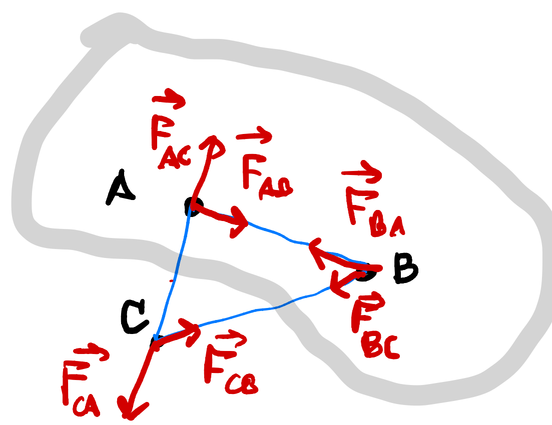
Studiamo come trattare "sistemi di punti materiali", cioè insiemi di masse puntiformi che possono interagire tra di loro o esternamente a esse. Questo ci serve per arrivare poi alla caratterizzazione meccanica di corpi estesi, visti come sistemi di un numero arbitrario (al limite infinito) di punti eventualmente connessi rigidamente tra di loro a costituire i corpi indeformabili.

Si inizia assegnando le forze agenti sull'insieme di punti e, convenzionalmente, le si distingue in forze interne ed esterne al sistema (quindi la suddivisione dipende da cosa si è definito "sistema"):





Sistema: A, B, C

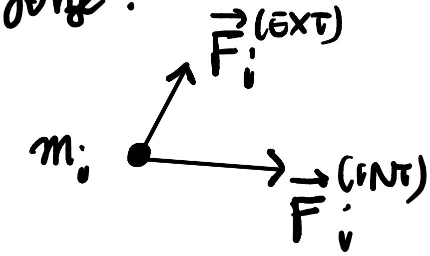
⇒ tutte le forze sono <u>interne</u>

Sistema: A, B

⇒ $\vec{F}_{AC}$, $\vec{F}_{BC}$ sono <u>esterne</u>

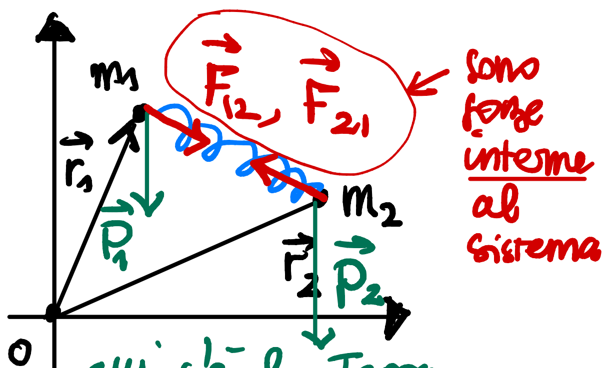
$\vec{F}_{AB}$, $\vec{F}_{BA}$ sono <u>interne</u>

In generale quindi sulla massa i-esima ci sono due (famiglie di) forze:



$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{(EXT)} + \vec{F}_i^{(INT)}$$

Esempio di riscaldamento: due masse puntiformi che sono soggette al rispettivo peso e a una forza interna che potrebbe essere ancora gravitazionale, ma qui è più interessante pensare a due masse con peso "macroscopico" – per esempio 1 Kg di massa → ~10 N di peso – per cui l'attrazione reciproca è trascurabile a distanze finite: allora prendiamo una molla ideale che le connette.



qui c'è la Terra che "applica" i pesi alle masse ⟶ forze esterne

TERRA

Le equazioni del moto sono standard:

$$m_1\ddot{\vec{r}}_1 = \vec{P}_1 + \vec{F}_{12}$$
$$m_2\ddot{\vec{r}}_2 = \vec{P}_2 + \vec{F}_{21}$$

con $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ per il III principio.

Sommandole:

$$m_1\ddot{\vec{r}}_1 + m_2\ddot{\vec{r}}_2 = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 = (m_1+m_2)\vec{g} = \vec{F}^{(EXT)}_{TOTALE}$$

In questa scrittura le forze interne si sono semplificate (il che non vuol dire che non fanno nulla!).

Introduciamo una nuova coordinata vettoriale così definita:

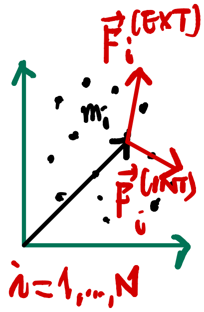
$$\vec{R} \equiv \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1+m_2} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{M_{TOT}}, \quad M_{TOT} = m_1+m_2$$

per la quale la somma delle equazioni del moto diventa

$$M_{TOT}\ddot{\vec{R}} = \vec{F}^{(EXT)}_{TOT} = M_{TOT}\vec{g} \Leftrightarrow \ddot{\vec{R}} = \vec{g}$$

ovvero: c'è una posizione vettoriale, $\vec{R}$, che accelera come un singolo punto materiale nel campo $\vec{g}$ senza influenza dalla molla!

Impostiamo lo studio generale di N punti materiali sotto l'azione di forze sia interne che esterne che saranno caratterizzate da dipendenze anche molto complicate:



$$\vec F_i^{(EXT)} = \vec F_i^{(EXT)}(\vec r_i; \vec v_i; t)$$

$$\vec F_i^{(INT)} = \vec F_i^{(INT)}(\vec r_1,\dots,\vec r_N; \vec v_1,\dots,\vec v_N; t)$$

[le forze esterne sulla massa i dipendono solo da dove è e dove va la massa stessa]

[le forze esterne sulle massa i agiscono sempre a coppie e in generale quindi sono influenzate da posizioni/velocità di tutte le masse]

Cosa sappiamo / possiamo scrivere:

$$m_i \vec a_i = \frac{d\vec p_i}{dt} = \vec F_i = \vec F_i^{(EXT)} + \vec F_i^{(INT)} \quad ; \; i=1,\dots,N$$

le cui soluzioni, $\vec r_i = \vec r_i(t)$; $i=1,\dots,N$, sono N posizioni vettoriali (3N scalari) che descrivono il moto delle N masse.

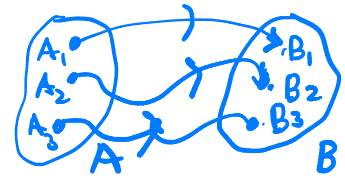
Sono equazioni pressoché impossibili da risolvere già per $N \geq 3$ (in meccanica quantistica va anche peggio). Quello che si fa di solito è di «compattare» queste N equazioni per ottenere la descrizione di qualche caratteristica "collettiva" del sistema.

In ogni caso, possiamo anche derivare dalle N equazioni del moto le N equazioni vettoriali per il momento angolare e le N equazioni scalari per il lavoro compiuto dalle forze:

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec L_{O i}}{dt} = \vec \tau_{O i}^{(EXT)} + \vec \tau_{O i}^{(INT)} \quad [-\vec v_O \times \vec p_i] \\ \Delta E_{K\,A_iB_i} = W^{(EXT)}_{A_iB_i} + W^{(INT)}_{A_iB_i} \end{cases} \qquad i=1,\dots,N$$

con le definizioni note: $\vec{L}_{O_i} = \vec{r}_i \times \vec{p}_i$, $\vec{\tau}^{(EXT)}_{O_i} = \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(EXT)}$, $\vec{\tau}^{(INT)}_{O_i} = \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(INT)}$

$$W^{(INT,EXT)}_{A_iB_i} = \int_{A_iB_i} \vec{F}_i^{(INT,EXT)} \times d\vec{r}\,, \qquad \Delta E_{K\,A_iB_i} = \frac{p^2_{i B_i}}{2m_i} - \frac{p^2_{i A_i}}{2m_i}$$



Adesso sommiamo sia le equazioni del moto che le loro «conseguenze», cioè le equazioni del momento angolare e dell'energia cinetica:

$$① \quad \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \vec{F}_i^{(EXT)} + \vec{F}_i^{(INT)} \Rightarrow \sum_i \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum_i \vec{F}_i^{(EXT)} + \sum_i \vec{F}_i^{(INT)} \Rightarrow \frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}^{(EXT)} + \vec{F}^{(INT)}$$

dove $\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i$, $\vec{F}^{(EXT)} = \sum_i \vec{F}_i^{(EXT)}$, $\vec{F}^{(INT)} = \sum_i \vec{F}_i^{(INT)}$

$$② \quad \frac{d\vec{L}_{O_i}}{dt} = \vec{\tau}^{(EXT)}_{O_i} + \vec{\tau}^{(INT)}_{O_i} \Rightarrow \sum_i \frac{d\vec{L}_{O_i}}{dt} = \sum_i \vec{\tau}^{(EXT)}_{O_i} + \sum_i \vec{\tau}^{(INT)}_{O_i} \Rightarrow \frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{\tau}^{(EXT)}_O + \vec{\tau}^{(INT)}_O \; \left[- \vec{v}_O \times \vec{P} \right]$$

dove $\vec{L}_O = \sum_i \vec{L}_{O_i}$, $\vec{\tau}^{(EXT/INT)}_O = \sum_i \vec{\tau}^{(EXT/INT)}_{O_i}$

$$③ \quad \Delta E_{K\,A_iB_i} = W^{(EXT)}_{A_iB_i} + W^{(INT)}_{A_iB_i} \Rightarrow \sum_i \Delta E_{K\,A_iB_i} = \sum_i W^{(EXT)}_{A_iB_i} + \sum_i W^{(INT)}_{A_iB_i} \Rightarrow \Delta E_{K\,AB} = W^{(EXT)}_{AB} + W^{(INT)}_{AB}$$

dove $\Delta E_{K\,AB} = \sum_i \Delta E_{K\,A_iB_i}$, $W^{(EXT/INT)}_{AB} = \sum_i W^{(EXT/INT)}_{A_iB_i}$

Quindi abbiamo introdotto/definito delle grandezze totali del sistema:

$\vec{P}$, quantità di moto totale, $\vec{L}_O$ momento angolare totale riferito a O

$\Delta E_{K\,AB}$, variazione della energia cinetica totale $A_i \to B_i$, $\vec{F}^{(EXT/INT)}$ risultante vettoriale delle forze esterne/interne

$\vec{\tau}_O^{(EXT/INT)}$ risultante dei momenti delle forze esterne/interne riferiti a O. $W_{AB}^{(EXT/INT)}$ lavori totali delle forze esterne/interne passando da (A_i) a (B_i)

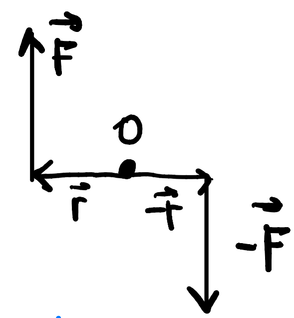
Prima di proseguire è importante osservare che nel caso di una singola massa l'equazione del moto implica anche l'equazione del momento angolare e quella del lavoro: sono sue conseguenze dirette:

Se si assegna $\vec{F}$, un polo O e un cammino AB allora anche $\vec{\tau}_O$ e W_{AB} sono determinati.

Se ci sono più masse soggette a forze questa implicazione non è più vera in generale, ovvero la conoscenza delle $\vec{F}_i$ (esterne o interne) non basta per determinare il momento (delle forze esterne o interne) rispetto al polo assegnato e/o il lavoro nel cammino dato.

Ci torniamo ma qui comunque vediamo due esempi che ci convincono che bisogna adesso stare attenti.

① Coppia di forze parallele a risultante nulla.

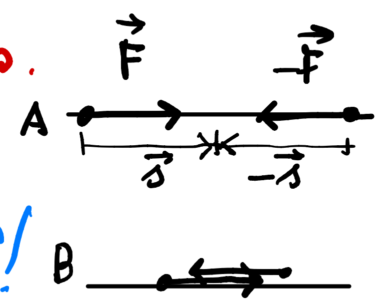


qui evidentemente $\vec{F}_{TOT} = \vec{0}$ ma $\vec{\tau}_0 \neq \vec{0}$,

ovvero non si può scrivere $\vec{\tau}_0 = \vec{r} \times \vec{F}_{TOT}$!

Invece $\vec{\tau}_0 = \vec{r} \times \vec{F} + (-\vec{r}) \times (-\vec{F}) = 2\vec{r} \times \vec{F} \neq \vec{0}$!

② Coppia di forze concorrenti a risultante nulla.



anche qui $\vec{F}_{TOT} = \vec{0}$ ma $W_{AB} \neq 0$,

ovvero non si può scrivere $W_{AB} = \int_{AB} \vec{F}_{TOT} \cdot d\vec{r}$!

Invece $W_{AB} = \vec{s} \cdot \vec{F} + (-\vec{s}) \cdot (-\vec{F}) = 2sF \neq 0$!