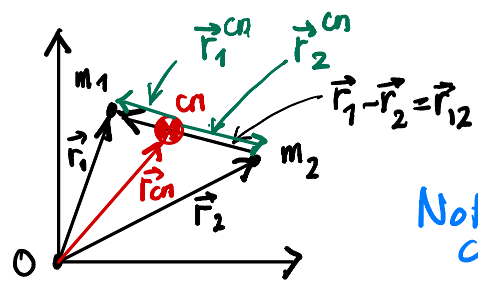
Il centro di massa è una coordinata vettoriale molto speciale nella trattazione dei sistemi di punti materiali: ci si riferisce infatti a due principali sistemi di riferimento: uno inerziale (di solito, e "fisso") detto sistema di laboratorio (SL) e uno con origine nel centro di massa, detto proprio sistema del centro di massa (SCM) ← il SCM in generale non è inerziale!

Prendiamo il caso più semplice di due sole masse $(N=2)$ e otteniamo come le osservazioni cinematiche di SL e SCM si confrontano (la generalizzazione a N masse può essere comunque fatta).




← rappresenta la massa 1 vista da 2.

$$\vec{r}_{CM}=\frac{m_1\vec{r}_1+m_2\vec{r}_2}{m_1+m_2}$$

Notare che:

$$\vec{r}_1^{\,CM}=\vec{r}_1-\vec{r}_{CM}=\frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{r}_{12}$$

$$\vec{r}_2^{\,CM}=\vec{r}_2-\vec{r}_{CM}=-\frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{r}_{12}$$

← provare con vari valori di $m_1, m_2$!

quindi, come ci si aspetta, $\vec{r}_{1/2}^{\,CM}$ sono paralleli a $\vec{r}_{12}$ e vale

$$\vec{r}_1^{\,CM}-\vec{r}_2^{\,CM}=\vec{r}_1-\vec{r}_2=\vec{r}_{12}\quad\text{(ancora la coordinata relativa)}$$

Possiamo allora trasformare le velocità (come le misura il CM):

$$\vec{v}_1^{\,CM}=\frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{v}_{12},\quad \vec{v}_2^{\,CM}=-\frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{v}_{12},$$

$\vec{v}_{12}=\vec{v}_1-\vec{v}_2$ è la velocità relativa dei due punti

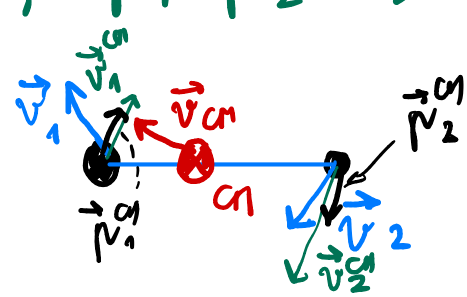
↖ sempre vettori opposti!

e i momenti:

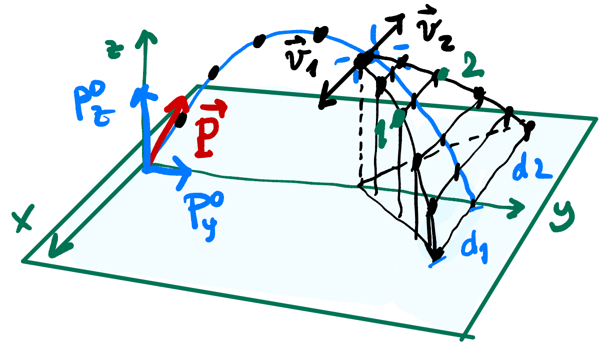
$$\vec{p}_1^{\,CM}=m_1\vec{v}_1^{\,CM}=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\vec{v}_{12},\quad \vec{p}_2^{\,CM}=m_2\vec{v}_2^{\,CM}=-\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\vec{v}_{12}$$

ovvero nel SCM vale sempre $\vec{p}_{TOT}^{\,CM}=\vec{0}$ (qui $\vec{p}_1^{\,CM}+\vec{p}_2^{\,CM}=\vec{0}$).

Provare il caso $m_1=2\,kg$, $\vec{v}_1\equiv(-1,2)\,m/s$
$m_2=1\,kg$, $\vec{v}_2\equiv(-2,-2)\,m/s$



È utile lo studio del corpo in volo sotto l'azione del suo peso che a un certo istante si frammenta in due parti di masse $m_1$, $m_2$ per causa di una forza interna improvvisa che le fa allontanare con velocità inizialmente orizzontali e opposte:




Si usa l'equazione cardinale di moto

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}^{(EXT)} = M\vec{g} \quad , \quad M = m_1 + m_2$$

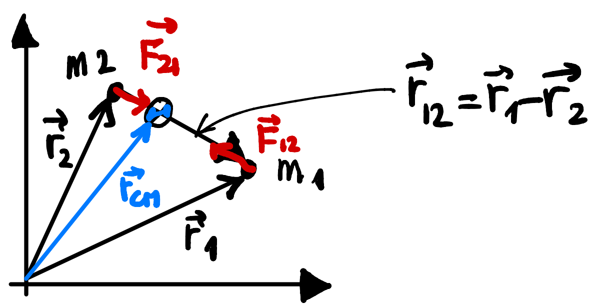
Sugli assi cartesiani $\frac{dP_x}{dt} = \frac{dP_y}{dt} = 0$, $\frac{dP_z}{dt} = -Mg$

quindi: $P_x = \text{costante} = 0 = M v_x^{cm} \Rightarrow v_x^{cm} = 0 = \frac{dx_{cm}}{dt} = \frac{m_1 \dot{x}_1 + m_2 \dot{x}_2}{m_1 + m_2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{m_1 v_1 = -m_2 v_2} \quad \left[ \text{d'accordo con } P_x^{cm} = 0 \right]$$

ma anche $P_y = \text{costante} = M v_y^{cm}$ ; $P_z = -Mgt \Leftrightarrow v_z^{cm} = v_{z0}^{cm} - gt$

Impostiamo ora il "problema dei due corpi": due masse puntiformi soggette esclusivamente alle forze INTERNE reciproche.




Equazioni del moto (ripresa di quanto già visto all'inizio):

$$\begin{cases} m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}_{12} \\ m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F}_{21} \end{cases} ; \quad \vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \quad \text{(qualsiasi forza interna va bene)}$$

Se sommiamo si ha subito che il CM è libero come previsto dalla I eq. cardinale.
Facciamo la differenza:

$$\begin{cases} \ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}_{12} / m_1 \\ \ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F}_{21} / m_2 \end{cases} \Rightarrow \ddot{\vec{r}}_1 - \ddot{\vec{r}}_2 = \ddot{\vec{r}}_{12} = \frac{\vec{F}_{12}}{m_1} - \frac{\vec{F}_{21}}{m_2} = \vec{F}_{12}\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) \Rightarrow \mu_{12} \ddot{\vec{r}}_{12} = \vec{F}_{12}$$

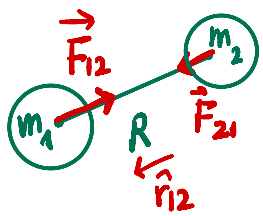
dove $\mu_{12} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ è la « massa ridotta » del sistema. Abbiamo così ottenuto la EQUAZIONE del MOTO RELATIVO tra le 2 masse [$\vec{a}_{12} = \ddot{\vec{r}}_{12}$ è la accelerazione relativa]. Osserviamo anche che

$$\begin{cases} \vec{a}_1^{cm} = \vec{a}_1 - \vec{a}_{cm} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{a}_{12} \\ \vec{a}_2^{cm} = \vec{a}_2 - \vec{a}_{cm} = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{a}_{12} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} m_1 \vec{a}_1^{cm} &= \mu_{12} \vec{a}_{12} = \vec{F}_{12} \\ m_2 \vec{a}_2^{cm} &= -\mu_{12} \vec{a}_{12} = \vec{F}_{21} \end{aligned}}$$

← queste espressioni spiegano che la forza interna accelera le masse relativamente al loro CM.

Vediamo come funziona in un paio di esempi (importanti).

Forza di gravitazione universale a due corpi (inevitabilmente)




$$\vec F_{12} = -\vec F_{21} = -G\frac{m_1 m_2}{R^2}\hat r_{12} = \mu_{12}\vec a_{12} = \mu_{12}\ddot{\vec R} \, :$$

$\vec R = \vec r_{12}$ è la posizione vettoriale relativa 1/2 $\Rightarrow$

$$\ddot{\vec R} = -\frac{1}{\mu_{12}} G\frac{m_1 m_2}{R^2}\hat r_{12} = -G\frac{(m_1+m_2)}{R^2}\hat r_{12}$$

Nella trattazione « a un corpo » - per esempio Terra-Luna - si era scritto

$$\ddot{\vec R}_{TL} = -\frac{G M_T}{R^2_{TL}}\hat r_{TL}$$

[sostituzione: $m_1 = M_T$, $m_2 = M_L$, per esempio]

che quindi è una approssimazione della relazione "esatta" a due corpi:

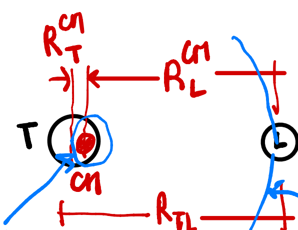
$$\ddot{\vec R}_{TL} = -\frac{G M_T}{R^2_{TL}}\left(1+\frac{M_L}{M_T}\right)\hat r_{TL} \, .$$

Numericamente $M_T \cong 80 M_L$

$\Rightarrow R_T^{cm} = \frac{M_L}{M_L+M_T}R_{TL} \simeq \frac{R_{TL}}{81}$, $R_L^{cm} = \frac{M_T}{M_L+M_T}R_{TL} \simeq \frac{80 R_{TL}}{81}$

$\approx 4500$ km ($< R_T$) $\qquad \approx 379{,}000$ km

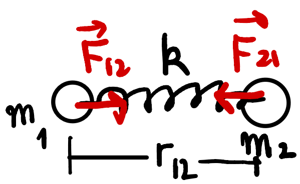
$R_{TL} \simeq 384\,000$ km




orbita circolare di T attorno a cm con accelerazione $a_T^{cm} = F_{TL}/M_T$

idem per la Luna con $a_L^{cm} = F_{LT}/M_L$ $\Rightarrow \frac{a_L^{cm}}{a_T^{cm}} \simeq \frac{M_T}{M_L} = 80$

Due masse unite a una molla ideale : l'equazione relativa di moto è




$$\vec F_{12} = -k\vec r_{12} = \mu_{12}\ddot{\vec r}_{12}$$

proiezione radiale (l'unica che ha senso qui)

$$\ddot r_{12} = -\frac{k}{\mu_{12}} r_{12}$$

E' l'equazione di moto di un oscillatore armonico, $\ddot r_{12} = -\omega_{12}^2 r_{12}$, con pulsazione "ridotta", $\omega_{12} = \sqrt{k/\mu_{12}}$. Se $m_2 \gg m_1$ $\omega_{12} \cong \sqrt{k/m_1}$,

se $m_1 = m_2$ $\omega_{12} = \sqrt{2k/m}$

La coordinata relativa $r_{12}$ ha la solita legge oraria armonica,

$$r_{12}(t) = r_0\cos(\omega_{12}t+\phi) \, .$$

NB : il CM obbedisce all'azione delle eventuali forze esterne.