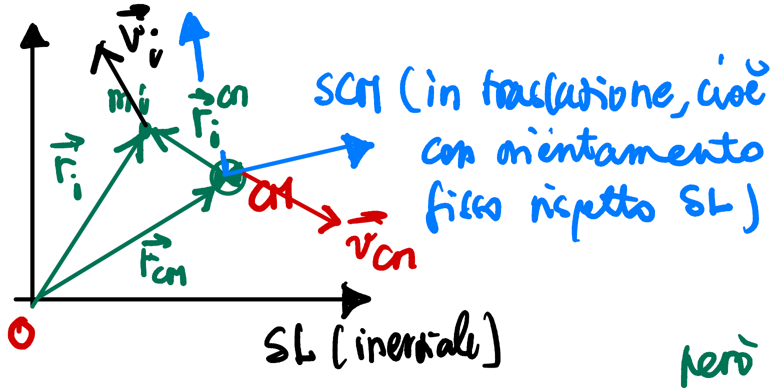
Si può dividere l'energia cinetica di un sistema di punti in moto considerando contributi separati del moto RELATIVO al centro di massa e di quello DEL centro di massa, COME SE (e solo COME SE) fosse un punto di massa M_{TOT} con velocità $\vec{v}_{CM}$.



Dobbiamo calcolare la quantità [riferita a O]

$$E_K = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

però lo facciamo partendo dalla $\vec{v}_i = \vec{v}_i^{\,CM} + \vec{v}_{CM}$:

$$E_K = \frac{1}{2}\sum_i m_i (\vec{v}_i^{\,CM} + \vec{v}_{CM})\cdot(\vec{v}_i^{\,CM} + \vec{v}_{CM}) = \frac{1}{2}\sum_i m_i v_i^{CM\,2} + \frac{1}{2}\left[\sum_i m_i\right] v_{CM}^2 + \sum_i m_i \vec{v}_i^{\,CM}\cdot\vec{v}_{CM}$$

osserviamo che $\sum_i m_i \vec{v}_i^{\,CM} = M\vec{v}_{CM}^{\,CM} = \vec{P}^{CM}$, cioè è la quantità di moto del sistema vista da riferimento CM, per cui è nulla. Rimane

$$E_K = \underbrace{\frac{1}{2}\sum_i m_i v_i^{CM\,2}}_{\text{è l'energia cinetica del sistema misurata nel riferimento SCM!}} + \underbrace{\frac{1}{2} M v_{CM}^2}_{\text{è l'energia cinetica di un punto di massa } M \text{ con velocità } v_{CM}\text{: la chiamiamo energia cinetica del CM}}$$

$$E_K = E_{K_{CM}}^{REL} + E_{K\,CM}$$

[Si chiama 2^A scomposizione o teorema di Koenig]

Osserviamo anche che, nel caso di due masse puntiformi (problema dei due corpi) risulta che

$$E_{K\,CM}^{REL} = \frac{1}{2} m_1 v_1^{CM\,2} + \frac{1}{2} m_2 v_2^{CM\,2} = \frac{1}{2} m_1 \left[\frac{m_2}{M} v_{12}\right]^2 + \frac{1}{2} m_2 \left[-\frac{m_1}{M} v_{12}\right]^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2^2}{M^2} v_{12}^2 + \frac{1}{2}\frac{m_2 m_1^2}{M^2} v_{12}^2 = \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{M} v_{12}^2 = \frac{1}{2}\mu_{12} v_{12}^2$$

[μ_{12} è la massa ridotta!]. È lasciata come esercizio la verifica che torna per due masse la scomposizione sopra dimostrata.

Si può fare una scomposizione analoga quando si considera il momento angolare di un sistema di punti materiali e lo si vuole calcolare di nuovo nei due riferimenti SL e SCM con origini O e CM.

Il conto va fatto esplicitamente:

$$\vec{L}_0 = \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i = \sum_i m_i \left(\vec{r}_i^{\,CM} + \vec{r}^{\,CM}\right) \times \left(\vec{v}_i^{\,CM} + \vec{v}^{\,CM}\right) =$$

$$= \underbrace{\sum_i m_i \vec{r}_i^{\,CM} \times \vec{v}_i^{\,CM}}_{\text{è il momento angolare del sistema riferito al CM}} + \underbrace{\left(\sum_i m_i \vec{r}_i^{\,CM}\right)}_{\text{questo è } M\vec{r}_{CM}^{\,CM}\text{, cioè la posizione del CM nel SCM: è nulla!}} \times \vec{v}_{CM} + \vec{r}^{\,CM} \times \underbrace{\left(\sum_i m_i \vec{v}_i^{\,CM}\right)}_{\text{già vista: è } \vec{P}^{\,CM} \text{ nel SCM, nulla!}} + \underbrace{\left(\sum_i m_i\right)}_{M} \underbrace{\left(\vec{r}_{CM} \times \vec{v}_{CM}\right)}_{\text{non dipendono da } i}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{L}_0 = \vec{L}_{CM}^{REL} + M \vec{r}_{CM} \times \vec{v}_{CM} = \vec{L}_{CM}^{REL} + \vec{r}_{CM} \times \vec{P}$$

Si chiama 1ª scomposizione o teorema di Koenig.

il momento angolare è scomposto nel momento angolare «intrinseco» o relativo al CM e in quello di un punto di massa M che si muove con il centro di massa: è il momento angolare «del CM».

Si scrive anche $\quad \vec{L}_0 = \vec{S} + \vec{L}$ $\quad$ [$\vec{S} = \vec{L}_{CM}^{REL}$ è lo «spin» e $\vec{L} = \vec{r}_{CM} \times \vec{P}$ è il momento angolare «orbitale»]

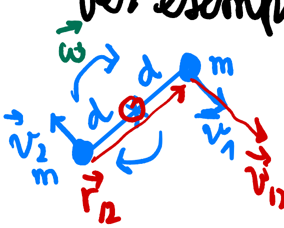
Vediamo come funziona con due masse puntiformi:

$$\vec{S} = m_1 \vec{r}_1^{\,CM} \times \vec{v}_1^{\,CM} + m_2 \vec{r}_2^{\,CM} \times \vec{v}_2^{\,CM} = m_1 \cdot \frac{m_2^2}{M^2}\left(\vec{r}_{12} \times \vec{v}_{12}\right) + m_2 \frac{m_1^2}{M^2}\left(\vec{r}_{12} \times \vec{v}_{12}\right) =$$

$$= \mu_{12} \vec{r}_{12} \times \vec{v}_{12}$$

[come nel caso di $E_{K_{CM}}^{REL} = \frac{1}{2}\mu_{12} v_{12}^2$, $\vec{S}$ è una grandezza "ridotta"]

Per esempio: lancio del manubrio

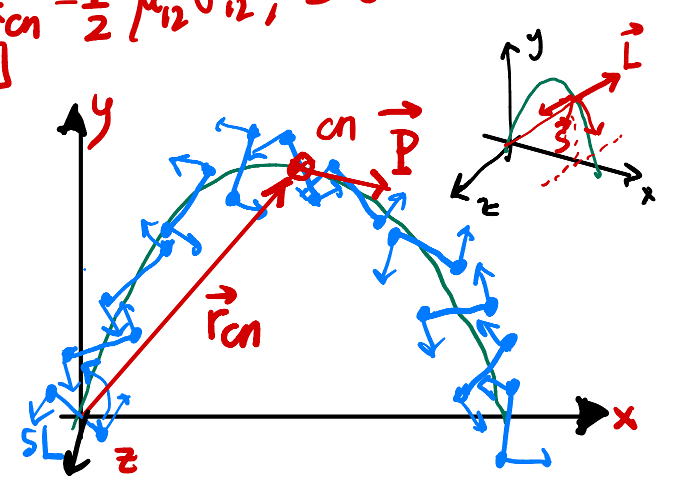


$$\vec{v}_{12} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 = \vec{\omega} \times \vec{r}_{12}$$

$$\vec{S} = \mu_{12} \vec{r}_{12} \times \vec{v}_{12} = \frac{m}{2}(2d)(2d)\vec{\omega} = (2md^2)\vec{\omega}$$

$$\vec{L} = \vec{r}_{CM} \times \vec{P}.$$

Sia $\vec{L}$ che $\vec{S}$ sono in direzione $\hat{z}$.



Adesso dobbiamo chiarire, nel caso della II equazione cardinale, qual è il ruolo delle forze (ovvero dei momenti da esse eventualmente esercitati) nel variare i contributi del momento angolare totale del sistema.

Sappiamo che $\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \vec{\tau}_0^{\,(EXT)}$ e che $\vec{L}_0 = \vec{S} + \vec{L} = \vec{L}_{CM}^{REL} + \vec{r}_{CM}\times\vec{P}$

per cui $\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \frac{d\vec{S}}{dt} + \frac{d\vec{L}}{dt}$. Un primo passaggio è semplice e si spiega molto bene:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{r}_{CM}\times\vec{P}\right) = \vec{r}_{CM}\times\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{r}_{CM}\times\vec{F}^{(EXT)}$$

ovvero il momento angolare del CM (orbitale) se varia lo fa a causa del momento che il risultante delle forze esterne (se c'è) riferito al centro di massa!

Ma cosa produce l'eventuale variazione del momento angolare intrinseco (relativo al CM, lo spin)? Calcolo esplicito:

$$\frac{d\vec{S}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum_i m_i \vec{r}_i^{\,CM}\times\vec{v}_i^{\,CM}\right) = \sum_i m_i \vec{r}_i^{\,CM}\times\frac{d\vec{v}_i^{\,CM}}{dt} = \sum_i m_i \vec{r}_i^{\,CM}\times\left(\vec{a}_i - \vec{a}_{CM}\right) =$$

$$= \sum_i \underbrace{m_i \vec{r}_i^{\,CM}\times\vec{a}_i}_{\vec{F}_i} - \underbrace{\left(\sum_i m_i \vec{r}_i^{\,CM}\right)}_{= \text{ nullo, già visto perché}}\times\vec{a}_{CM} = \sum_i \vec{r}_i^{\,CM}\times\vec{F}_i = \sum_i \vec{r}_i^{\,CM}\times\vec{F}_i^{(EXT)} + \sum_i \vec{r}_i^{\,CM}\times\vec{F}_i^{(INT)}$$

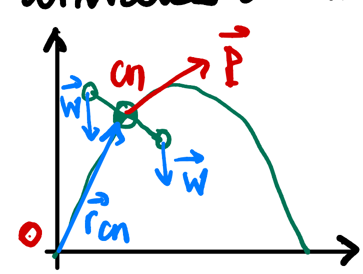
$$= \vec{\tau}_{CM}^{\,(EXT)} + \vec{\tau}_{CM}^{\,(INT)}$$

$= \vec{0}$ per il III principio

Abbiamo recuperato $\vec{\tau}_{CM}^{\,(EXT)} = \sum_i \vec{r}_i^{\,CM}\times\vec{F}_i^{(EXT)}$, cioè il risultante dei momenti delle forze esterne riferiti al CM. In definitiva

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \frac{d\vec{L}}{dt} + \frac{d\vec{S}}{dt} = \underbrace{\vec{r}_{CM}\times\vec{F}^{(EXT)}}_{\text{momento del risultante su CM}} + \underbrace{\vec{\tau}_{CM}^{\,(EXT)}}_{\text{risultante dei momenti su CM}}$$

Torniamo al manubrio



$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r}_{CM}\times(\underbrace{2\vec{W}}_{\vec{F}^{(EXT)}}) = \vec{r}_{CM}\times\frac{d\vec{P}}{dt}$$

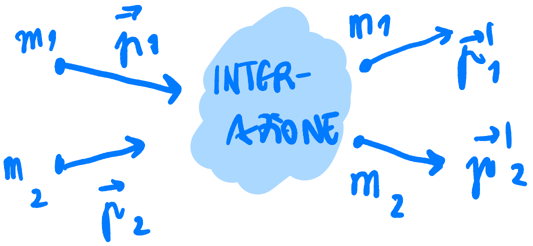
$\vec{F}^{(EXT)}$ fa variare $\vec{P}$ $\Leftrightarrow$ fa variare $\vec{L}$ del CM

$$\frac{d\vec{S}}{dt} = \sum_i \vec{r}_i^{\,CM}\times\vec{F}_i^{(EXT)} = \sum_i \vec{r}_i^{\,CM}\times(m_i\vec{g}) = \underbrace{\left(\sum_i m_i \vec{r}_i^{\,CM}\right)}_{\vec{0}}\times\vec{g} \Rightarrow$$

$\vec{S}$ = costante: il peso non cambia lo spin.

Torniamo all'origine del discorso sulle interazioni tra corpi come iniziato parlando dei carrelli di Huygens.

Lo schema prevede che le interazioni si concretizzino in uno SCAMBIO di QUANTITA' di MOTO tra i partner:



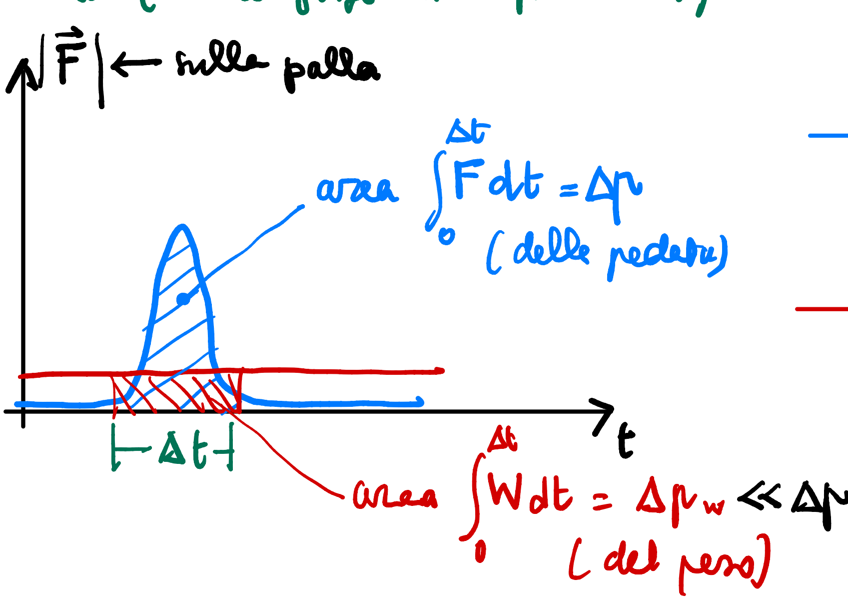
$\therefore$ $\Delta\vec p_1 = -\Delta\vec p\,'_2$ o $\vec p_1 + \vec p_2 = \vec p\,'_1 + \vec p\,'_2$

o $\vec p_{TOT} = \overrightarrow{costante}$ per un SISTEMA ISOLATO

Se il sistema non è isolato, le forze esterne influenzano (modificano) la sua quantità di moto.

<u>PERÒ</u>: parliamo di APPROSSIMAZIONE d'URTO quando possiamo a ogni effetto pratico trascurare le variazioni di quantità di moto causate da agenti esterni $\Rightarrow$ resta solo l'effetto delle forze INTERNE $\Rightarrow$ SI CONSERVA LA QUANTITA' di MOTO.

Per esempio: calcio a un pallone. La pedata (interazione piede-pallone) è una forza interna che conserva la quantità di moto <u>del sistema</u>; ci sono forze esterne (la gravità, attriti...) ma nel caso in esame le trascuriamo perché le forze interne agiscono – scambiando momento piede-palla – per tempi molto brevi per cui sono molto intense (dette forze «impulsive»).

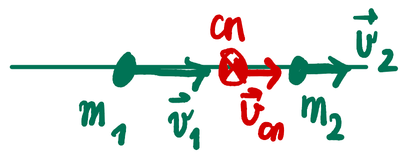


—— forza che la palla subisce nel contatto con il piede

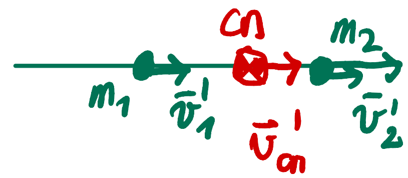
—— peso della palla

Δt durata della pedata

Un semplice caso di studio con collisione « collineare » (o centrale) tra masse puntiformi:



prima



Approssimazione d'urto:

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{v}_1' + m_2\vec{v}_2'$$

$$\vec{v}_{cm} = \vec{v}_{cm}'$$

$$\vec{P} = \text{costante}$$

$$\vec{p}^{\,cm} = \vec{0}$$

Per esempio: $v_2 = 0 \Rightarrow m_1 v_1 = m_1 v_1' + m_2 v_2'$

se si conoscono m_1/m_2, v_1 e v_1' $\Rightarrow$ si calcola v_2'.

Di solito però si aggiungono informazioni sul bilancio energetico del processo a seconda che si conservi o meno l'energia <u>CINETICA</u> (e allora si parla di urto ELASTICO / INELASTICO).

Esempio di urto 1 DIM <u>elastico</u> di m_1 su m_2 inizialmente ferma:

$$m_1 v_1 = m_1 v_1' + m_2 v_2' \qquad (\vec{p} = \overrightarrow{\text{costante}})$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 \qquad (E_K = \text{costante})$$

Che si risolve (di solito) così: $\alpha = m_2/m_1 \Rightarrow \begin{cases} v_1 - v_1' = \alpha v_2' \\ v_1^2 - v_1'^2 = \alpha v_2'^2 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_1 - v_1' = \alpha v_2' \\ v_1 + v_1' = v_2' \end{cases} \Rightarrow v_2' = \frac{2}{1+\alpha} v_1 \,, \quad v_1' = \frac{1-\alpha}{1+\alpha} v_1$$

Con le masse $\boxed{v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \,, \quad v_2' = \frac{2 m_1}{m_1 + m_2} v_1}$

Si possono studiare i vari « casi interessanti », $m_1 \gg m_2$, $m_1 = m_2$ ... e calcolare le velocità e i momenti riferiti al SCM verificando le conservazioni e che risulti $p_{cm} = 0$.

Si può anche fare il bilancio energetico (verificarlo per esercizio):

$$E_{K_i} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = E_{K_f} = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 = \left(\begin{matrix}\text{teorema} \\ \text{di Koenig}\end{matrix}\right) = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v_{cm}^2 + \frac{1}{2} \mu_{12} v_{12}^2$$

nella quale <u>comunque</u> (anche se l'urto NON è elastico) $E_{K_{cm}} = \frac{1}{2} M v_{cm}^2 = \text{costante}$.