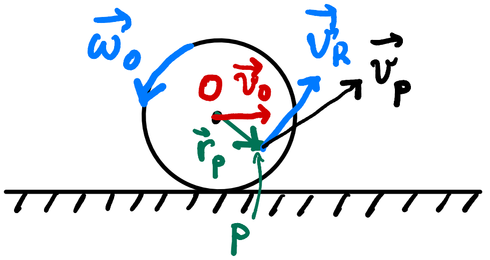
Un'altra classe ampia di applicazioni della dinamica dei corpi rigidi comprende lo studio di fenomeni di ROTOLAMENTO di oggetti con sezione tipicamente circolare (almeno limitatamente a questo corso).

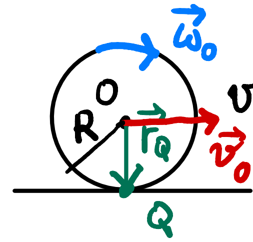
Il moto di rotolamento è già stato affrontato nella parte di cinematica: qui ricordiamo che è una sovrapposizione di una traslazione «rigida» e di una rotazione attorno a un asse con orientazione fissa:



$$\vec{v}_R = \vec{\omega}_0 \times \vec{r}_P \qquad \vec{v}_P = \vec{v}_0 + \vec{v}_R$$

$\vec{v}_0$ è la velocità di traslazione che tutti i punti possiedono; $\vec{v}_R$ è la velocità di rotazione attorno a O propria del punto P.

Ci interessa qui in particolare la velocità del punto Q di contatto istantaneo dell'oggetto al pavimento



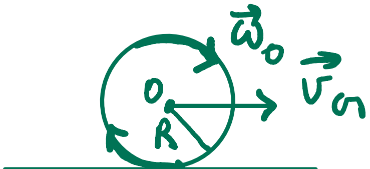
$$v_Q = |\vec{v}_Q| = |\vec{v}_0 + \vec{\omega}_0 \times \vec{r}_Q|$$

Si considera il caso di traslazione e rotazione tali da generare velocità $\vec{v}_0$ e $\vec{v}_R$ con direzioni OPPOSTE: allora $v_Q = v_0 - \omega_0 R$

Il rotolamento corrispondente è definito "PURO" quando risulta

$v_0 = \omega_0 R$ [e $a = \alpha R$] $\Rightarrow$ $v_Q = 0$ (contatto istantaneamente fermo)

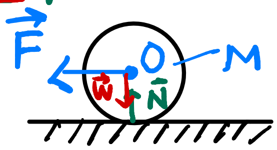
Da un punto di vista del ruolo delle forze osserviamo subito che, in generale, il moto di puro rotolamento può essere visto come condizione di EQUILIBRIO di rototraslazione in assenza di forze: se $\vec{\tau}_0^{(EXT)} = \vec{0}$ e $\vec{F}^{(EXT)} = \vec{0}$ $\Rightarrow$ $\vec{\omega}_0 = \vec{\text{cost}}$ e $\vec{v}_{CM} = \vec{\text{cost}}$:



si "sceglie" $\omega_0 = v_{CM} R$ = costante e questo assicura un moto di puro rotolamento «libero» o inerziale: nessuna forza richiesta.

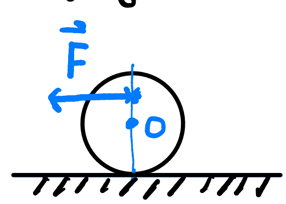
Passo successivo: mettere in moto di puro rotolamento un oggetto a partire da fermo, quindi agendo con forze opportune.

Immaginiamo il corpo su un piano che non presenta attriti radenti e soggetto alla forza $\vec{F}$ costante come nel disegno:



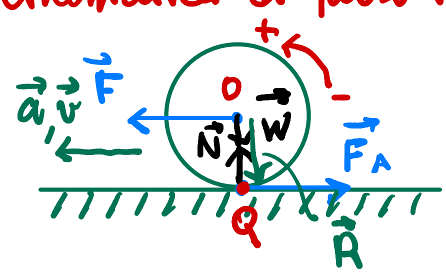
La forza $\vec{F}$ non esercita momento rispetto O per cui il corpo non può modificare la sua velocità angolare che, se all'inizio è nulla, tale rimane. Però $\vec{F}$ fa accelerare il corpo secondo la I equazione cardinale con accelerazione $\vec{a} = \vec{F}/M$ ⇒ slittamento

Perché il corpo inizi a ruotare la forza deve esercitare un momento su O, il che avviene, per esempio, se $\vec{F}$ è applicata come in figura.



È possibile ottenere un moto di puro rotolamento in questo caso? Provare ...

Possiamo anche considerare un piano di supporto sufficientemente ruvido da generare attrito STATICO nel punto di contatto tale da assicurare che esso rimanga istantaneamente fermo ⇒ condizione cinematica di puro rotolamento:



$\vec{v}_Q = \vec{0}$

equazioni cardinali
$$\begin{cases} \text{I} & \vec{F}_{TOT} = M\vec{a} = \vec{F} + \vec{F}_A \ (+\vec{N} + \vec{W}) \\ \text{II} & \vec{\tau}_O = I_O \vec{\alpha} = \vec{R} \times \vec{F}_A \end{cases}$$

proiettando: $\begin{cases} Ma = F - F_A \\ I_O \alpha = R F_A \end{cases}$, F_A è ATTRITO STATICO, non noto a priori.

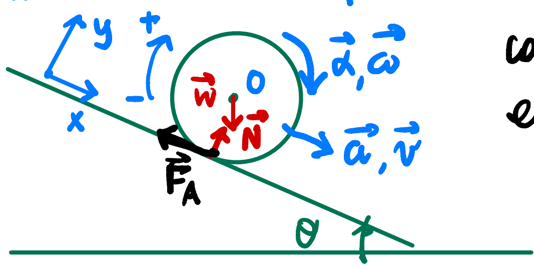
$a = \alpha R \quad (v_Q = 0)$

$$\Rightarrow Ma = F - F_A = F - \frac{I_O}{R}\alpha = F - \frac{MK_O^2}{R}\frac{a}{R} \Rightarrow a = \frac{F/M}{1 + K_O^2/R^2} < \frac{F}{M}$$

L'attrito «rallenta traslazionalmente» e «accelera rotazionalmente» il corpo se si vuole mantenere la condizione di puro rotolamento.

L'attrito si OPPONE ALLO SLITTAMENTO del PUNTO di CONTATTO Q!

Se inclinamo il piano la forza peso è in grado di accelerare il centro di massa e, se c'è attrito radente sufficiente per fornire la condizione di immobilità istantanea del punto di contatto, si ha un moto di puro rotolamento:



condizione cinematica $v = \omega R$, $a = \alpha R$

equazioni cardinali (proiettate)

$$Mg\sin\vartheta - F_A = Ma$$

$$F_A R = I_o \alpha = M K_o^2 a / R$$

$$\Rightarrow a = \frac{g \sin\vartheta}{1 + K_o^2/R^2}, \quad F_A = Mg\sin\vartheta \frac{K_o^2}{R^2 + K_o^2}$$

Notare che $a < g\sin\vartheta$, che è l'accelerazione del punto materiale sul piano liscio.

Possiamo calcolare per esempio:

	K_o^2/R^2	$\frac{a}{g\sin\vartheta}$	$\frac{F_A}{Mg\sin\vartheta}$
anello sottile	1	1/2	1/2
disco pieno	1/2	2/3	1/3
sfera	2/5	5/7	2/7

e vedere chi "vince la gara di discesa" a partire da fermo: intuitivamente arriva prima (maggiore accelerazione) il meno iner- .

Comunque sia, l'attrito statico necessario per il puro rotolamento non può superare l'attrito statico massimo: $F_A \lesssim F_{A\,max} = \mu_S N = \mu_s Mg\cos\vartheta$

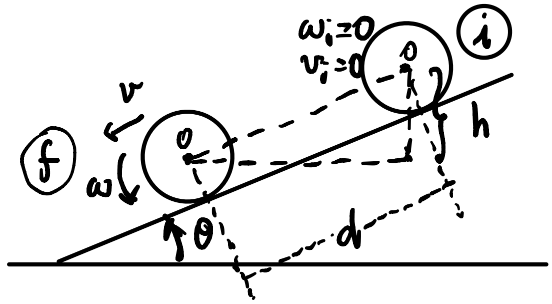
ovvero $\operatorname{tg}\vartheta \lesssim \mu_s \frac{R^2 + K_o^2}{K_o^2}$ altrimenti il punto di contatto SLITTA e non c'è puro rotolamento ma una condizione di roto-scivolamento con i due componenti regolati indipendentemente dalle due equazioni cardinali SENZA POTER SCRIVERE $a = \alpha R$ e ponendo ora $F_A = F_{A\,CIN} = \mu_c N = \mu_c Mg\cos\vartheta$

- $Ma = Mg\sin\vartheta - F_A = Mg(\sin\vartheta - \mu_c\cos\vartheta)$
- $I_o\alpha = F_A \cdot R = \mu_c MgR\cos\vartheta = MK_o^2\alpha$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{\mu_c g R\cos\vartheta}{K_o^2}, \quad a = g(\sin\vartheta - \mu_c\cos\vartheta)$$

con $\alpha R \neq a$ [se $\mu_c = 0 \Rightarrow \alpha = 0$, $a = g\sin\vartheta$, "puro slittamento"].

È anche importante trattare questo stesso problema usando la conservazione dell'energia:



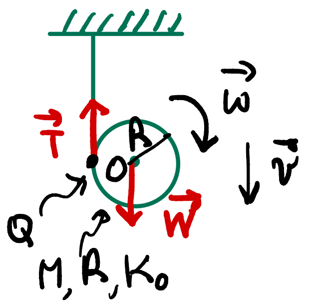
$E_i = 0$, $E_f = -Mgh + E_{K_f}$,

$E_{K_f} = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I_o\omega^2$, $v = \omega_o R$ (puro rotolamento), $I_o = MK_o^2$

$$E_{K_f} = E_{K_i} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2gh}{1 + K_o^2/R^2}}$$

che va confrontata con la $v = \sqrt{2a \cdot d}$ per un moto uniformemente vario, con $d\sin\theta = h$, per cui si ottiene di nuovo che $a = g\sin\theta/(1 + K_o^2/R^2)$

Altro caso di studio interessante: lo «srotolamento puro» dello yo-yo



Siamo in assenza di slittamenti $\Rightarrow v = \omega_o R$, $a = \alpha_o R$ e Q è istantaneamente fermo

Equazioni cardinali $\quad \vec{T} + \vec{W} = M\vec{a}$, $\quad \vec{R}\times\vec{T} = I_o\vec{\alpha}_o$ [O=CM, si può quindi usare l'equazione cardinale «diretta»]

$$\Rightarrow \begin{cases} Mg - T = Ma \\ T\cdot R = MK_o^2\alpha_o \Leftrightarrow T = Ma\cdot K_o^2/R^2 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{R^2}{R^2+K_o^2}g, \quad T = Mg\frac{K_o^2}{R^2+K_o^2}$$

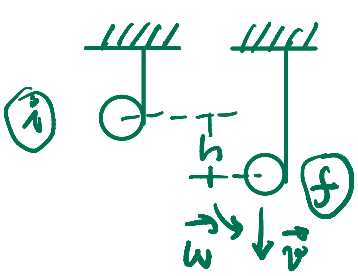
Per esempio, disco pieno, $K_o^2 = R^2/2 \Rightarrow a = \frac{2}{3}g$, $T = Mg/3$

$\underline{NB_1}$ si può risolvere usando nella II equazione cardinale il polo Q perché è immobile, $\vec{v}_Q = \vec{0}$. Attenzione al cambio di momento di inerzia, però:

$$\vec{\tau}_Q = \vec{R}\times\vec{W} = I_Q\vec{\alpha} \Leftrightarrow MgR = MK_Q^2\alpha \Leftrightarrow a = g\cdot\frac{R^2}{K_Q^2}$$

con $K_Q^2 = K_o^2 + R^2$ per il teorema di Huygens-Steiner $\Rightarrow a = \frac{R^2}{R^2+K_o^2}g$

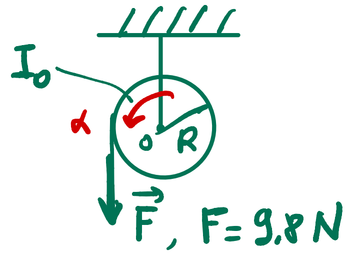
$\underline{NB_2}$ si può risolvere il caso anche con la conservazione dell'energia:



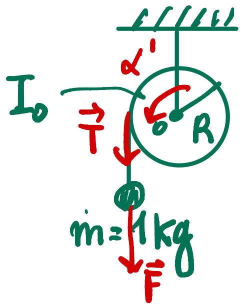
$E_i = 0 = E_f = -Mgh + \frac{1}{2}I_o\omega^2 + \frac{1}{2}Mv^2$, $\quad v = \omega R$, $I_o = MK_o^2$

$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{2gh}{1+K_o^2/R^2}} = \sqrt{2ah} \Rightarrow a = \frac{R^2}{R^2+K_o^2}g$$

Attenzione a ricordarsi sempre il significato di inerzia: le due situazioni



$\alpha = \dfrac{FR}{I_0}$



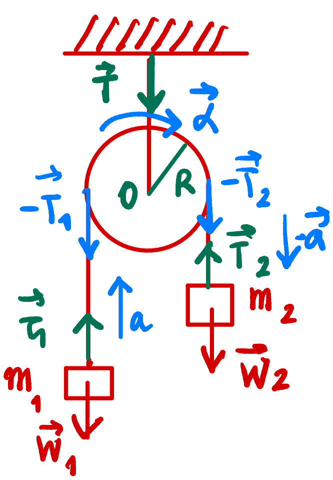
NON SONO EQUIVALENTI!

$F - T = ma \Rightarrow T = F - ma = F - m\alpha' R$

$TR = I_0 \alpha'$

$\Rightarrow \quad FR - m\alpha' R^2 = I_0 \alpha' \Rightarrow \alpha' = \dfrac{FR}{(I_0 + mR^2)}$

A questo punto possiamo studiare anche la macchina di Atwood tenendo conto dell'inerzia rotazionale della carrucola. Basta utilizzare le equazioni cardinali e tenere ora conto che, in assenza di slittamenti, il moto (accelerato) delle masse appese implica quello della carrucola per cui ci si aspetta un momento di forze non nullo attorno all'asse $\Rightarrow$ le tensioni ai capi della carrucola devono ora essere differenti.



La condizione di non-slittamento è sempre $a = \alpha R$ e le equazioni cardinali proiettate diventano

$$\left.\begin{aligned} m_1 a &= T_1 - W_1 = T_1 - m_1 g \\ m_2 a &= W_2 - T_2 = m_2 g - T_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow (m_1 + m_2) a = T_1 - T_2 + (m_2 - m_1) g$$

$$I_0 \alpha = (T_2 - T_1) R \Leftrightarrow Ma = (T_2 - T_1) R^2 / K_0^2$$

$$\Rightarrow \quad a = \frac{(m_2 - m_1)\, g}{m_1 + m_2 + MK_0^2 / R^2}$$

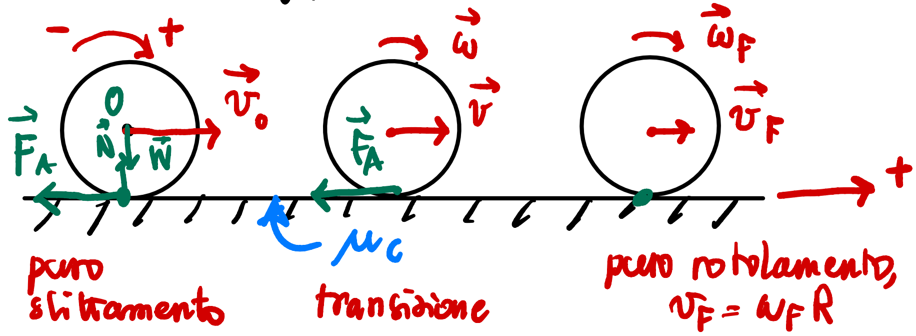
Poi si può anche ottenere la tensione di supporto al soffitto $\vec{T}$ semplicemente imponendo l'equilibrio traslazionale nella forma

$$\vec{T} + \vec{W} - (\vec{T}_1 + \vec{T}_2) = \vec{0} \Leftrightarrow T = T_1 + T_2 + Mg = \left[m_1 + m_2 + M - \frac{(m_1 - m_2)^2}{m_1 + m_2 + M\frac{K_0^2}{R^2}} \right] g$$

attenzione qui

da verificare per esercizio!

Un altro caso di studio: conversione da puro scivolamento a puro rotolamento (per esempio: lancio di una pallina da ping-pong sul tavolo oppure di una boccia da bowling)



La transizione avviene a causa del momento prodotto dall'attrito cinetico

L'attrito si « spegne » quando si passa al puro rotolamento.

Usiamo le equazioni cardinali: $\vec N + \vec W + \vec F_A = \vec F_A = M\vec a$, $F_A = \mu_c N = \mu_c Mg$

$\Rightarrow$ $a = -\mu_c g$ (in direzione "+") $\Rightarrow$ legge oraria della velocità del CM:

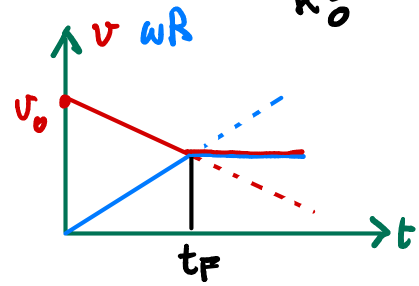
$$v(t) = v_0 - \mu_c g t$$

Poi $\vec\tau_0 = I_0\vec\alpha \Leftrightarrow F_A R = I_0\alpha$, $\alpha = \frac{F_A R}{I_0} = \frac{\mu_c M g R}{M K_0^2} = \mu_c g \frac{R}{K_0^2}$

per cui si ha la legge oraria per la velocità angolare attorno a O:

$$\omega(t) = \mu_c g \frac{R}{K_0^2} t$$

Utile un grafico:

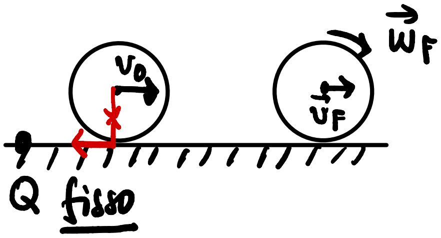


in t_F inizia il rotolamento puro per $\omega_F R = v_F$:

$$\mu_c g R^2/K_0^2\, t_F = v_0 - \mu_c g t_F$$

$\Rightarrow$ $t_F = \frac{v_0}{\mu_c g}\frac{K_0^2}{K_0^2+R^2}$ $\Rightarrow$ $\omega_F = v_0 \frac{R}{K_0^2+R^2}$, $v_F = v_0\frac{R^2}{K_0^2+R^2}$ [$v_F = 5/7\, v_0$ per una sfera piena]

Si può risolvere anche utilizzando la conservazione del momento angolare:



Il momento risultante delle forze sul corpo rispetto Q (qualunque) è nullo (ricordare che $\vec W = -\vec N$)

$\Rightarrow$ $\vec L_Q$ = costante

L_Q (iniziale) $= MRv_0$ (solo "orbitale")

L_Q (finale) $= MRv_F + I_0\omega_F$ (con "spin")

$\Rightarrow$ $MRv_0 = MRv_F + MK_0^2\frac{v_F}{R}$ $\Rightarrow$ $v_F = v_0\frac{R^2}{R^2+K_0^2}$