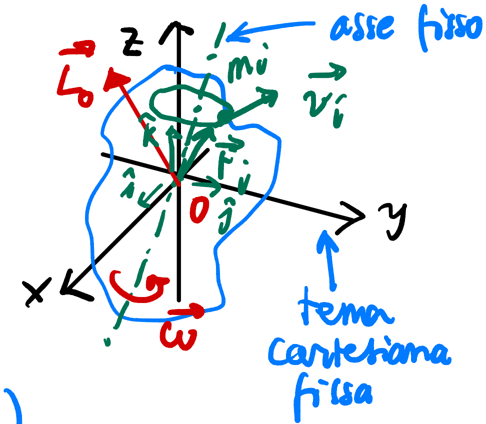
È possibile studiare in generale la relazione tra il momento angolare e la velocità di rotazione di un corpo rigido attorno a un asse fisso. Siccome si vuole cercare una relazione tra una coppia di vettori ($\vec{L}_o$ e $\vec{\omega}$) in tre dimensioni, possiamo prevedere la necessità di introdurre 9 numeri in tutto.



In ogni caso, utilizziamo direttamente la definizione di $\vec{L}_o$ in funzione delle posizioni e velocità delle masse (discrete o infinitesime continue) che costituiscono il corpo in esame:

$$\vec{L}_o = \sum_i \vec{L}_{oi} = \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i = \sum_i m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i).$$

Lavoriamo esplicitamente sui prodotti esterni:

$$\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i = \hat{\imath}\,(\omega_y z_i - \omega_z y_i) + \hat{\jmath}\,(\omega_z x_i - \omega_x z_i) + \hat{k}\,(\omega_x y_i - \omega_y x_i)$$

$$\vec{r}_i \times \vec{v}_i = \hat{\imath}\,(y_i v_{z_i} - z_i v_{y_i}) + \hat{\jmath}\,(z_i v_{x_i} - x_i v_{z_i}) + \hat{k}\,(x_i v_{y_i} - y_i v_{x_i})$$

$$\Rightarrow \vec{r}_i \times \vec{v}_i = \hat{\imath}\,(y_i^2 \omega_x - x_i y_i \omega_y - z_i x_i \omega_z + z_i^2 \omega_x) + \hat{\jmath}\,(z_i^2 \omega_y - z_i y_i \omega_z - x_i y_i \omega_x + x_i^2 \omega_y) + \hat{k}\,(x_i^2 \omega_z - x_i z_i \omega_x - y_i z_i \omega_y + y_i^2 \omega_z)$$

$$= \hat{\imath}\left[\omega_x (y_i^2 + z_i^2) - x_i y_i \omega_y - x_i z_i \omega_z\right] + \hat{\jmath}\left[\omega_y (x_i^2 + z_i^2) - x_i y_i \omega_x - y_i z_i \omega_z\right] + \hat{k}\left[\omega_z (x_i^2 + y_i^2) - x_i z_i \omega_x - y_i z_i \omega_y\right]$$

Adesso moltiplichiamo per le m_i (o le dm) e sommiamo (o integriamo)

$\Rightarrow$ otteniamo questa scrittura per il momento angolare sulla base cartesiana adottata $[\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}]$:

$$L_{Ox} = I^O_{xx}\omega_x + I^O_{xy}\omega_y + I^O_{xz}\omega_z$$
$$L_{Oy} = I^O_{yx}\omega_x + I^O_{yy}\omega_y + I^O_{yz}\omega_z$$
$$L_{Oz} = I^O_{zx}\omega_x + I^O_{zy}\omega_y + I^O_{zz}\omega_z$$

con $I^O_{xx} = \int (y^2+z^2)\,dm$; $I^O_{yy} = \int (x^2+z^2)\,dm$; $I^O_{zz} = \int (x^2+y^2)\,dm$;

$I^O_{xy} = I^O_{yx} = -\int xy\,dm$; $I^O_{xz} = I^O_{zx} = -\int xz\,dm$; $I^O_{yz} = I^O_{zy} = -\int yz\,dm$

Quindi i 6 numeri (proiezioni cartesiane) $L_{O\alpha}$ $(\alpha = x, y, z)$ e ω_β $(\beta = x, y, z)$ sono collegati dai 9 numeri $I^O_{\alpha\beta}$ (di cui 6 sono indipendenti)

È possibile adottare una scrittura matriciale :

$$L_{O\alpha} = \sum_\beta I_{\alpha\beta}\,\omega_\beta \qquad (\alpha = x, y, z)$$

Gli elementi diagonali $I_{\alpha\alpha}$ si chiamano «principali» di inerzia, i fuori diagonale $I_{\alpha\beta}$ sono detti «prodotti» di inerzia.

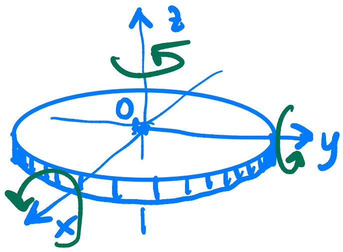
Vista la loro definizione [del tipo : $x_\alpha y_\beta$] si devono trasformare come PRODOTTO DI VETTORI e sono la rappresentazione sulla base cartesiana adottata del cosiddetto TENSORE di INERZIA (simmetrico, di «rango» 2, perché "prodotto tensoriale" di 2 vettori ⇒ ha due indici — un vettore è un "tensore di rango 1")

Si vede allora che la II equazione cardinale in questa rappresentazione diventa $\tau^{(EXT)}_\alpha = \dfrac{dL^O_\alpha}{dt} = \sum_\beta I^O_{\alpha\beta}\dfrac{d\omega_\beta}{dt}$

e quella dell'energia cinetica di rotazione $E_K = \dfrac{1}{2}\sum_\alpha\sum_\beta I^O_{\alpha\beta}\,\omega_\alpha\omega_\beta$

NB gli elementi del tensore $I^0_{\alpha\beta}$ dipendono dalla base adottata.

Per esempio:



In questa base abbiamo già ottenuto che

$$L_{Oz} = \frac{MR^2}{2}\omega_z$$

$$L_{Ox} = \frac{MR^2}{4}\omega_x, \quad L_{Oy} = \frac{MR^2}{4}\omega_y$$

quindi, in questa base, la matrice che rappresenta il tensore I^0 è diagonale:

$$I^0 = \begin{bmatrix} MR^2/4 & 0 & 0 \\ 0 & MR^2/4 & 0 \\ 0 & 0 & MR^2/2 \end{bmatrix} = \frac{MR^2}{4}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

NB qui le rotazioni sono disaccoppiate relative alle tre direzioni (principali). Se $\vec{\omega}$ ha direzione principale allora $\vec{L}_O \parallel \vec{\omega}$.

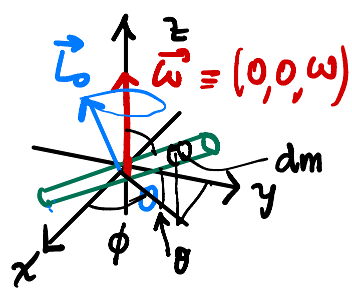
infatti i prodotti di inerzia si annullano per simmetria:

$$I^0_{xy} = I^0_{yx} = -\int x \cdot y \, dm = 0 \quad \text{ecc.} \quad \text{e} \quad I^0_{zz} = \int (x^2+y^2)\,dm = I^0_z \quad \text{ecc.}$$

Su una base arbitraria la matrice di I^0 non è diagonale e con i prodotti di inerzia non nulli ci si aspetta che $\vec{L}_O$ preceda attorno a $\vec{\omega}$. Si può anche scegliere una base in cui l'asse di rotazione ($\vec{\omega}$) è fisso e lungo una direzione cartesiana e studiare la eventuale precessione di $\vec{L}_O$ attorno a essa.

Per esempio il caso già visto del manubrio "inclinato":

allora
$$\vec{L}_O = \begin{pmatrix} L_{Ox} \\ L_{Oy} \\ L_{Oz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & I^0 & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I^0_{xz} \\ I^0_{yz} \\ I^0_{zz} \end{pmatrix}\omega$$



$dm = \lambda\, dr$

$$\vec{r} = r\begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi \\ \cos\theta\sin\phi \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$

se i prodotti di inerzia I^0_{xz}, I^0_{yz} non sono nulli allora $\vec{L}_O$ non è parallelo a $\vec{\omega}$. Infatti:

$$I^0_{zx} = I^0_{xz} = -\int dm\, x z = -\lambda \sin\theta\cos\theta\cos\phi \int_{-l/2}^{+l/2} r^2\,dr = -\sin\theta\cos\theta\cos\phi \underbrace{\frac{\lambda l^3}{12}}_{Ml^2/12}$$

$$I^0_{zy} = I^0_{yz} = -\int dm\, y z = -\lambda \sin\theta\cos\theta\sin\phi \int_{-l/2}^{+l/2} r^2\,dr = -\sin\theta\cos\theta\sin\phi \underbrace{\frac{\lambda l^3}{12}}_{Ml^2/12}$$

$$I^0_{zz} = \int dm\,(x^2+y^2) = \cos^2\theta \underbrace{\lambda l^3/12}_{Ml^2/12}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} L^0_x = -\sin\theta\cos\theta\cos\phi \dfrac{Ml^2}{12} \\ L^0_y = -\sin\theta\cos\theta\cos\phi \dfrac{Ml^2}{12} \\ L^0_z = \cos^2\theta \cdot \dfrac{Ml^2}{12} \end{cases}$$

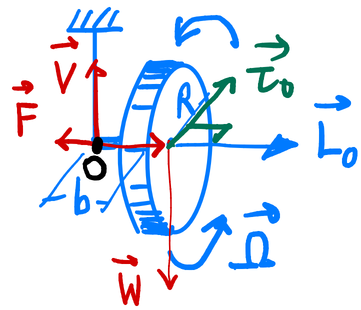
con $\phi = \omega t$ (L_{Ox}, L^0_y ruotano con velocità angolare ω)

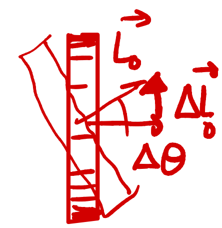
$\Rightarrow \vec{L}_O$ non è in direzione $\vec{\omega}$ a meno che

$$\begin{cases} \theta = 0 \Rightarrow \vec{L}_O = I_z \vec{\omega}, \quad I_z = \dfrac{Ml^2}{12} \\ \text{oppure } \theta = \pi/2 \Rightarrow \vec{L}_O = \vec{0} \end{cases}$$

Accenniamo anche al comportamento di sistemi con "stabilità giroscopica", ovvero a corpi rigidi in rotazione attorno a un asse e sostenuti da supporti "cardanici" che non inducono momenti non bilanciati sull'oggetto che dunque conserva il suo momento angolare.

Un caso interessante di sistema giroscopico è una ruota / disco in rotazione attorno a un asse centrale e sospeso come nel disegno:





il peso $\vec W$ genera il momento $\vec \tau_0$ che è perpendicolare a $\vec L_0$ (e $\vec W$):

$\frac{d\vec L_0}{dt} = \vec \tau_0 = \vec b \times \vec W$ $\Rightarrow$ in un intervallo di tempo Δt, $\vec L_0$ cambia di $\Delta \vec L_0 \simeq (\vec b \times \vec W)\Delta t$ e vale anche

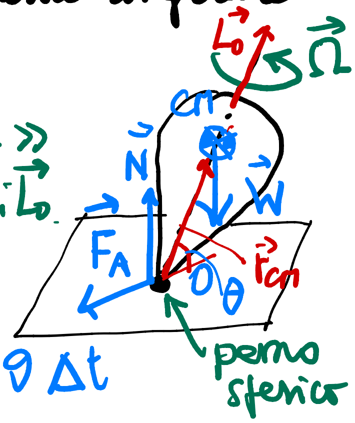
$\Delta L_0 \approx L_0 \Delta\theta$ con $L_0 \cong I_0 \Omega = M K_0^2 \Omega$ $\Rightarrow$ $\Delta L_0 \simeq M K_0^2 \Omega \Delta\theta = bMg\,\Delta t$

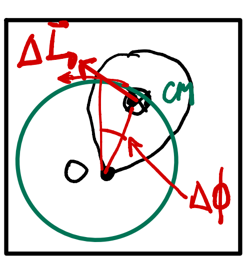
quindi $K_0^2 \Omega \Delta\theta \cong bg\,\Delta t$.

Si chiama $\omega = \Delta\theta/\Delta t$ velocità angolare di precessione di L_0 e

$\Omega\omega \cong bg/K_0^2$ che funziona bene se $\Omega \gg \omega$ (altrimenti bisogna tenere conto della deviazione dalla verticale, del momento angolare di precessione e del moto di «nutazione».

Comportamento simile si osserva in una «trottola» nella quale la $\vec \tau_0 = \vec r_{cm} \times \vec W = \frac{d\vec L_0}{dt}$ spiega la precessione di $\vec L_0$.





$$\Delta L_0 \cong L_0 \cos\theta \cdot \Delta\phi = \tau_0 \Delta t = r_{cm} Mg \cos\theta\,\Delta t$$

$$\Rightarrow L_0 \Delta\phi \cong r_{cm} Mg\,\Delta t, \quad L_0 = I_0 \Omega = M K_0^2 \Omega$$

$$\Rightarrow K_0^2 \Omega \Delta\phi \cong r_{cm} g\,\Delta t \Leftrightarrow \Omega\omega \cong \frac{r_{cm} g}{K_0^2}$$

dove $\omega = \frac{\Delta\phi}{\Delta t}$ è la velocità angolare di precessione.