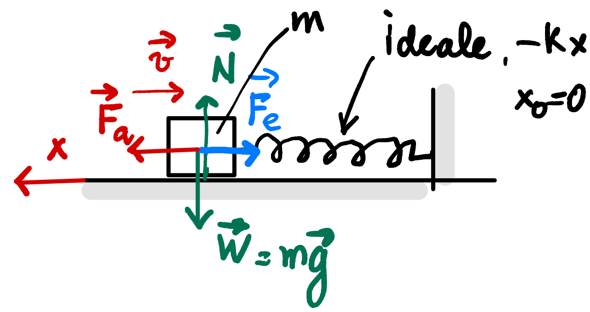
Studiamo il comportamento di un oscillatore armonico immerso in un fluido viscoso con associata forza secondo il modello di Stokes lineare $\vec{F}_a = -\beta \vec{v}$.



Consideriamo l'equazione del moto nella direzione x:

$$m\ddot{x} = -kx - \beta\dot{x}$$

($\dot{x}$ è positiva "verso sinistra" nel disegno)

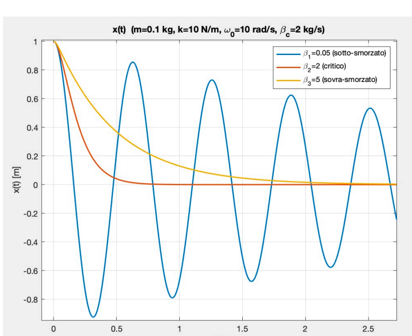
dove si usa per comodità una lunghezza a riposo nulla della molla.

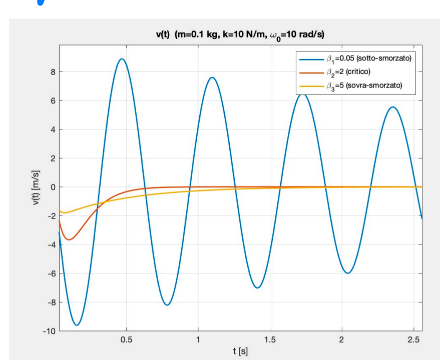
Riscritta: $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$, $\gamma = \frac{\beta}{2m}$, $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

con dimensioni $[\gamma] = [\omega_0] = [T]^{-1}$ (s^{-1} nel SI)

L'equazione del moto è differenziale al II ordine, lineare, omogenea e a coefficienti costanti. La matematica per questa classe di equazioni è ben nota e conduce a soluzioni di differente forma e interpretazione fisica al variare dei parametri γ e ω_0.

Si scopre che il moto è <u>oscillatorio</u> se vale $\gamma < \omega_0$ (attrito relativamente piccolo) mentre è smorzato senza oscillazioni se $\gamma \geq \omega_0$ (attrito relativamente grande). Nel caso $\gamma = \omega_0$ ("critico") il punto si avvicina all'equilibrio (anche se "per poco" non riesce a superarlo) il più rapidamente possibile; se $\gamma > \omega_0$ ("sovrasmorzamento") l'attrito domina e l'avvicinamento all'equilibrio è più lento





Non studiamo qui i 3 casi generali ma soltanto la condizione di debole smorzamento, $\gamma < \omega_0$ ovvero $\beta < 2\sqrt{m \cdot k}$ (kg/s)

Per farlo è sufficiente verificare che c'è una "buona" soluzione dell'equazione del moto e allora poi questa sarà l'unica.
Per il caso sotto-smorzato usiamo la legge oraria

$$x(t) = A\,e^{-\alpha t}\,\mathrm{sen}\,(\omega_s t + \phi)$$

A, ϕ da fissare con le condizioni iniziali
α, ω_s da determinare in funzione dei parametri del modello γ e ω_0.

Partendo da
$$\dot{x} = -\alpha A e^{-\alpha t}\,\mathrm{sen}(\omega_s t+\phi) + \omega_s A\, e^{-\alpha t}\cos(\omega_s t+\phi)$$
$$\ddot{x} = \alpha^2 A e^{-\alpha t}\,\mathrm{sen}(\omega_s t+\phi) - 2\alpha\omega_s A e^{-\alpha t}\cos(\omega_s t+\phi) - \omega_s^2 A e^{-\alpha t}\,\mathrm{sen}(\omega_s t+\phi)$$

sostituendo nell'equazione del moto — $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 = 0$ — e $\left\{\begin{array}{l}\text{raccogliendo}\\ \text{semplificando}\end{array}\right.$ $Ae^{-\alpha t}$, raggruppando i termini con sen / cos :

$$(\alpha^2 - \omega_s^2 - 2\gamma\alpha + \omega_0^2)\,\mathrm{sen}\,(\omega_s t+\phi) + (-2\alpha\omega_s + 2\gamma\omega_s)\cos(\omega_s t+\phi) = 0$$

che, per essere identicamente valida (nulla), implica l'annullarsi dei coefficienti sen/cos :

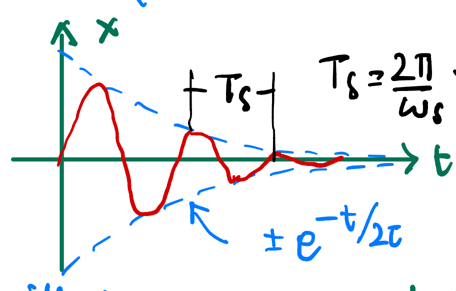
$$\begin{cases} \alpha^2 - \omega_s^2 - 2\gamma\alpha + \omega_0^2 = 0 \\ -2\alpha\omega_s + 2\gamma\omega_s = 0 \end{cases} \longrightarrow \alpha = \gamma \longrightarrow \omega_s = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \quad \left(\begin{array}{c}\text{NB:}\\ \gamma < \omega_0\end{array}\right)$$

Quindi la soluzione è valida nella forma

$$x(t) = A\,e^{-\gamma t}\,\mathrm{sen}\,\left(\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}\,t+\phi\right) = A\,e^{-t/2\tau}\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{\omega_0^2 - 1/4\tau^2}\,t+\phi\right)$$

dove si introduce il "tempo caratteristico" di smorzamento di ampiezza

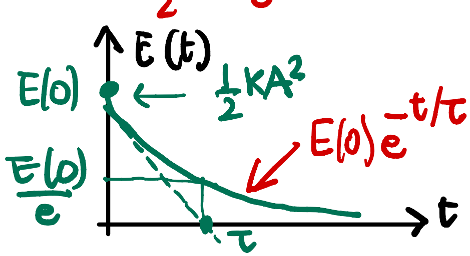
$$\tau = 1/2\gamma = m/\beta \quad (\text{secondi}).$$



$$T_s = \frac{2\pi}{\omega_s} > \frac{2\pi}{\omega_0} = T_0$$

Vale la pena ottenere anche l'energia dell'oscillatore, $E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Kx^2$.
Sostituendo x e $v = \dot{x} \approx \omega_s A e^{-\gamma t}\cos(\omega_s t+\phi)$ $[\omega_0 \gg \gamma,\ \omega_s \approx \omega_0]$

$$E \approx \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2 e^{-2\gamma t}\cos^2(\omega_0 t+\phi) + \frac{1}{2}KA^2 e^{-2\gamma t}\,\mathrm{sen}^2(\omega_0 t+\phi) = \frac{1}{2}KA^2 e^{-t/\tau}$$



notare che per $t=\tau$ è $E(\tau) = E(0)/e \sim 37\%$ di $E(0)$;
dal grafico : la retta tangente in $t=0$ incrocia l'asse t in $t=\tau$.