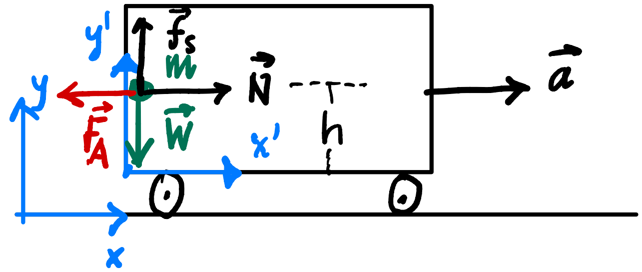
1

(a) Nel riferimento $x'y'$ solidale con il vagone non inerziale se la massa rimane ferma



$$\ddot{x}'=0 \;,\; \ddot{y}'=0$$

e su di essa c'è la forza apparente $\vec{F}_A=-m\vec{a}$. Le forze reali sono il peso $\vec{W}=m\vec{g}$, la reazione vincolare della parete $\vec{N}$ e la forza di attrito statico $\vec{f}_s$.

Equilibrio orizzontale : $\vec{N}+\vec{F}_A=\vec{0} \Leftrightarrow N=ma$

equilibrio verticale : $\vec{W}+\vec{f}_s=\vec{0} \Leftrightarrow f_s=mg$

Con la condizione di non slittamento $f_s \leq f_{s,MAX}=\mu_s N$ da cui $a \geq g/\mu_s$

ovvero l'accelerazione critica minima è $\boxed{a_c=g/\mu_s}$

(b) Se $a=\frac{a_c}{2} \Rightarrow$ c'è slittamento verso il basso, lungo l'asse y', con legge oraria che si determina dall'equazione di moto data da

$$m\vec{a}'=\vec{F}_A+\vec{N}+\vec{f}_D+\vec{W} \Rightarrow \text{lungo } y' : \quad ma'=-mg+f_D$$

dove $f_D=\mu_D N=\mu_D ma$ è ora l'attrito dinamico $\Rightarrow$

$$a'=\mu_D a-g=\mu_D\frac{a_c}{2}-g=g\left(\frac{\mu_D}{2\mu_s}-1\right);$$

il moto lungo y' è uniformemente vario con

$$y'(t)=y'(0)+v_{y'}(0)t+\frac{1}{2}a't^2=h+\frac{1}{2}g\left(\frac{\mu_D}{2\mu_s}-1\right)t^2;$$

tempo per arrivare al suolo t_F : $h+\frac{1}{2}g\left(\frac{\mu_D}{2\mu_s}-1\right)t_F^2=0 \Rightarrow$

$$\boxed{t_F=\sqrt{\frac{2h}{g(1-\mu_D/2\mu_s)}}}$$

(c) Valori numerici :

$$\boxed{a_c=\frac{9.8\ m/s^2}{0.25}=39.2\ m/s^2; \qquad t_F=\sqrt{\frac{2\times 1.2m}{9.8\frac{m}{s^2}\times\left(1-\frac{0.08}{2\times 0.25}\right)}}=0.54\ s}$$

(d) Nel riferimento inerziale del suolo xy le leggi orarie sono

$$x(t) = x' + \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}at^2 \quad \text{con} \quad a = \frac{a_c}{2} = \frac{g}{2\mu_S} \quad ; \quad y(t) = y' = h + \frac{1}{2}g\left(\frac{\mu_D}{2\mu_S} - 1\right)t^2$$

$$\Rightarrow \boxed{y = h + (\mu_D - 2\mu_S)x}$$

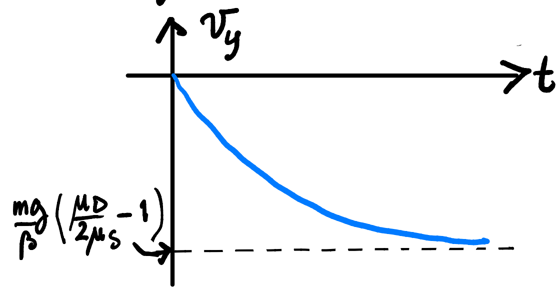
che è una retta con pendenza negativa $(\mu_D - 2\mu_S)$

(e) Con la forza di Stokes $\vec{f}_v = -\beta\vec{v}'$ in direzione y' l'equazione del moto è

$$m\ddot{y}' = \mu_D m a - mg - \beta\dot{y}'$$

che ha la nota soluzione per $v_{y'}$ $(= v_y)$ in forma esponenziale

$$\boxed{\dot{y}' = v_{y'} = v_y = -\frac{mg}{\beta}\left(1 - \frac{\mu_D}{2\mu_S}\right)\left(1 - e^{-\beta t/m}\right)}$$



(f) La potenza si ottiene dall'espressione $\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v}$.

Nel riferimento del vagone il moto è solo in direzione y' e quindi

$$\boxed{\mathcal{P}' = \left(-mg + \mu_D m a - \beta v'_y\right)v'_y = m a' \cdot v'_y}$$

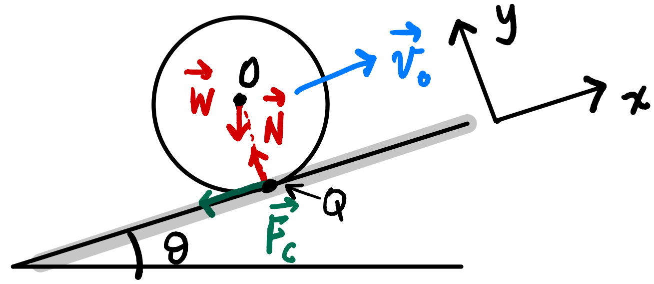
che è infatti uguale a $\frac{dE'_K}{dt}$, con $E'_K = \frac{1}{2}m{v'_y}^2$ energia cinetica.

Nel riferimento al suolo c'è anche la reazione vincolare N che lavora (la massa si muove in direzione x) e quindi si deve aggiungere alla potenza il contributo $Nv_x = ma \cdot at = ma^2t$: la potenza totale è

$$\boxed{\mathcal{P} = ma^2t + \left(-mg + \mu_D m a - \beta v_y\right) \cdot v_y = ma^2t + ma'v_y}$$

che infatti è uguale a $\frac{dE_K}{dt}$, con $E_K = \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}mv_y^2$, cioè è anche qui soddisfatto il teorema lavoro-energia cinetica (nella forma potenza - variazione di E_K nel tempo).

②



(a) Data la condizione iniziale di slittamento nasce nel punto di contatto una forza di attrito dinamico di modulo $F_c = \mu_c N = \mu_c m g \cos\vartheta$ per cui l'equazione cardinale per la traslazione è

$$m\vec{a} = \vec{W} + \vec{N} + \vec{F}_c \Rightarrow a = a_x = -g \sin\vartheta - \mu_c g \cos\vartheta = -g(\sin\vartheta + \mu_c \cos\vartheta);$$

l'equazione cardinale di rotazione attorno a O è $\vec{\tau}_O = I_O \vec{\alpha} \Rightarrow$

$$F_c R = \mu_c m g R \cos\vartheta = m K_O^2 \alpha \Leftrightarrow \alpha = \frac{\mu_c g R}{K_O^2} \cos\vartheta;$$

le leggi orarie per le velocità di traslazione e rotazione (attorno a O) sono

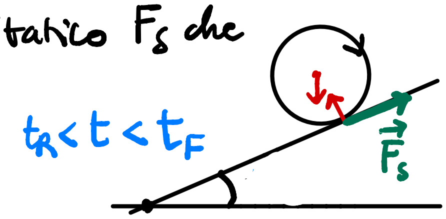
$$v = v_x = v_0 - g(\sin\vartheta + \mu_c \cos\vartheta) t; \quad \omega = \frac{\mu_c g R}{K_O^2} \cos\vartheta \, t$$

e la condizione di quiete di Q (puro rotolamento) avviene per $t = t_R$:

$$v(t_R) \equiv v_R = v_0 - g(\sin\vartheta + \mu_c \cos\vartheta) t_R = \omega(t_R) \cdot R = \mu_c g \cos\vartheta \frac{R^2}{K_O^2} t_R$$

$$\Rightarrow t_R = \frac{v_0}{g\left[\sin\vartheta + \mu_c\left(1 + \frac{R^2}{K_O^2}\right)\cos\vartheta\right]} \Rightarrow \boxed{v_R = v_0 \frac{\mu_c \cos\vartheta \cdot R^2/K_O^2}{\left[\sin\vartheta + \mu_c\left(1 + \frac{R^2}{K_O^2}\right)\cos\vartheta\right]}}$$

(b) Siccome l'attrito in Q è diventato statico e si ipotizza nel testo che sia sempre sufficiente a mantenere la condizione di puro rotolamento, questo sarà il tipo di moto per $t > t_R$, con $v = \omega R$ e v regolata dall'equazione cardinale con attrito statico F_s che ora è rivolto verso l'alto:



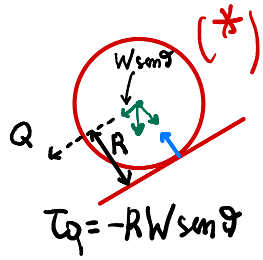
$$ma = -mg \sin\vartheta + F_s$$

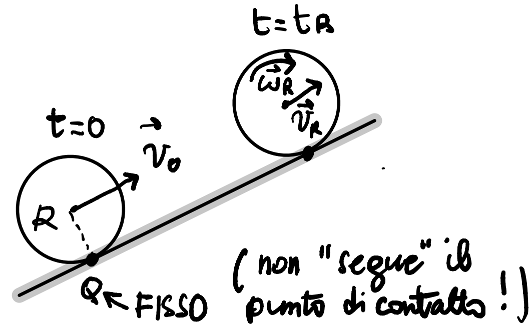
e rotazione regolata dalla $\tau_O = -F_s R = I_O \alpha = m K_O^2 \alpha$, però ora con $\alpha = a/R \Rightarrow F_s = -ma \frac{K_O^2}{R^2} \Rightarrow a = -\frac{g \sin\vartheta}{(1 + K_O^2/R^2)}$.

Allora $v = v_R + at = v_R - \frac{g\sin\vartheta}{(1+K_0^2/R^2)}\, t$ per $t_R \le t \le t_F$

e $v = 0$ per $\boxed{t_F = \frac{v_R}{g\sin\vartheta}\left(1+\frac{K_0^2}{R^2}\right)}$.

(c) Dal disegno si osserva che il momento angolare della biglia è calcolato in modulo (in direzione "oraria") come





$L_{Q_0} = m v_0 R$ (per $t=0$ c'è solo il momento "orbitale" del CM)

$L_{Q_R} = m v_R R + I_0 \omega_R$ (per $t = t_R$ c'è anche lo "spin" della biglia).

Calcolando la variazione di momento angolare da $t=0$ a $t=t_R$:

$$\Delta L_Q = L_{Q_R} - L_{Q_0} = m v_R R + m K_0^2 \cdot \frac{v_R}{R} - m v_0 R = m v_0 R \left[\frac{v_R}{v_0}\left(1+\frac{K_0^2}{R^2}\right) - 1\right] =$$

$$= m v_0 R \left[\frac{\mu_c \cos\vartheta \cdot R^2/K_0^2 \left(1+K_0^2/R^2\right)}{\sin\vartheta + \mu_c\left(1+R^2/K_0^2\right)\cos\vartheta} - 1\right] = -\, m v_0 R \cdot \left[\frac{\sin\vartheta}{\sin\vartheta + \mu_c\left(1+R^2/K_0^2\right)\cos\vartheta}\right] =$$

$$= -\, t_R \cdot m g R \sin\vartheta$$

(dal risultato al punto (a) per t_R) (*)

per cui è vero che $\Delta L_Q = \tau_Q \cdot \Delta t$ con $\tau_Q = -R \cdot W \cdot \sin\vartheta = -mgR\sin\vartheta$.

(d) Utilizzando il risultato per v_R al punto (a), posto $K_0^2/R^2 = 2/3$ (sfera cava) si ottiene che $\boxed{v_R/v_0 \cong 0.138}$ $\Rightarrow$ è corretto assumere che la sfera sia effettivamente cava.

(e) Tra $t = t_R$ e t_F il rotolamento è puro per cui lavora solo la forza peso e

$$\boxed{\Delta E_K = 0 - \frac{1}{2} m v_R^2 - \frac{1}{2} I_0 \omega_R^2 = -\frac{1}{2} m v_R^2 \left(1+\frac{K_0^2}{R^2}\right) \cong -0.15\ \text{mJ}}$$

3. La trasformazione è irreversibile con temperatura di equilibrio iniziale e finale invariata $T_A = 30°C \cong 303\,K$.

(a) Dopo l'espansione il gas soddisfa all'equazione di stato $V_f = nRT_A/P_A = 2\,\text{moli} \times 8.31\,J/mol \cdot K \times 303K / 1\,bar = \boxed{50.4\,\ell}$

(b) Il gas durante l'espansione lavora sull'ambiente esterno tramite il pistone e dunque il lavoro che compie è $W_{if} = P_A \cdot \Delta V$, $\Delta V = V_f - V_i$

dove $V_i = nRT_A/P_i$ con $P_i = 5\,bar \Rightarrow V_i = V_f/5 = 10.1\,\ell$

$\Rightarrow \boxed{W_{if} = 4.0 \times 10^3\,J}$

(c) ΔS_{gas} si ottiene a partire da un processo reversibile isotermo $\Rightarrow \Delta S_{gas} = nR \ln \frac{V_f}{V_i} = nR\ln 5 = 26.7\,J/K$;

il calore viene assorbito dall'ambiente in accordo con la
$Q_{gas} = W_{if} \Rightarrow \Delta S_{amb} = -\frac{Q_{gas}}{T_A} = -13.3\,J/K$;

$\Rightarrow \boxed{\Delta S_{univ} = \Delta S_{gas} + \Delta S_{amb} = +13.4\,J/K}$

(d) Il lavoro massimo ottenibile è in condizioni reversibili ed è dato da $W^{REV} = nRT_A \ln V_f/V_i = nRT_A \ln 5 = \boxed{8.1 \times 10^3\,J}$.

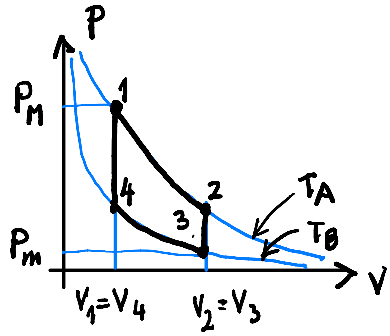
Si ha anche che $\Delta S_{univ} = nR\ln\frac{V_f}{V_i} - \frac{W_{if}}{T_A} = \frac{W^{REV} - W_{if}}{T_A}$

$\Rightarrow \boxed{T_A \cdot \Delta S_{univ} = W^{REV} - W_{if} = 4.1\,kJ}$ (lavoro "perduto").

(e) $\boxed{\Delta H = 0}$ perché $T_i = T_f$, H è funzione di stato e, dalle
$\begin{matrix} F = U - TS \\ G = H - TS \end{matrix} \Rightarrow \boxed{\Delta F = \Delta G = -T_A \Delta S_{gas} = -8.1 \times 10^3 J}$.

le diminuzioni di F e G sono pari al massimo lavoro ottenibile (quello reversibile)

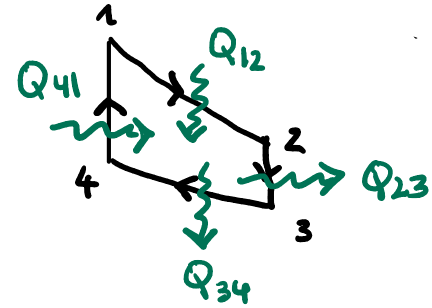
4.



$r_p = P_M / P_m$; $r_T = T_A / T_B$

essendo $P_M V_1 = P_M V_4 = nRT_A$
$P_m V_3 = P_m V_2 = nRT_B$

$\Rightarrow$ $V_2/V_1 = V_3/V_4 = r_p / r_T$



(a) macchina termica, percorrenza oraria:

$Q_{12} = W_{12} = nRT_A \ln(V_2/V_1) > 0$
$Q_{23} = nc_v (T_B - T_A) < 0$
$Q_{34} = W_{34} = nRT_B \ln(V_4/V_3) < 0$
$Q_{41} = nc_v (T_A - T_B) > 0$

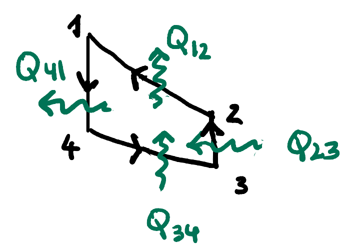
$$Q_{TOT} = W = Q_{12} + Q_{23} + Q_{34} + Q_{41} = Q_{12} + Q_{34} = nR(T_A - T_B) \ln(r_p/r_T) ;$$

$$Q_{IN} = Q_{12} + Q_{41} = nRT_A \ln \frac{r_p}{r_T} + nc_v (T_A - T_B)$$

$$\Rightarrow \boxed{\eta = \frac{W}{Q_{IN}} = \frac{(T_A - T_B) \ln(r_p/r_T)}{T_A \ln(r_p/r_T) + c_v/R\,(T_A - T_B)} = \frac{(r_T - 1) \ln(r_p/r_T)}{r_T \ln(r_p/r_T) + \frac{5}{2}(r_T - 1)}} ;$$

(b) macchina frigorifera, percorrenza anti-oraria:

calori/lavori come in (a) sopra con segno opposto.



$$\omega = \frac{Q_{OUT}}{|W|} \quad \text{con} \quad Q_{OUT} = |Q_{23}| + |Q_{34}| \Rightarrow$$

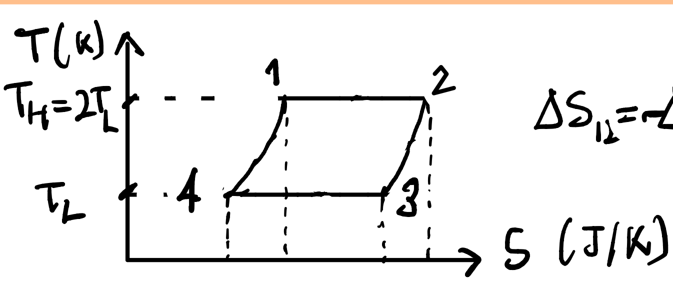
$$\Rightarrow \boxed{\omega = \frac{nc_v (T_A - T_B) + nRT_B \ln(r_p/r_T)}{nR(T_A - T_B) \ln(r_p/r_T)} = \frac{5/2\,(r_T - 1) + \ln(r_p/r_T)}{(r_T - 1) \ln(r_p/r_T)}}$$

(c) se $r_p = 10$ e $r_T = 2$ $\Rightarrow$

$$\boxed{\eta = \frac{\ln 5}{2\ln 5 + 5/2} = 0.28 \ , \quad \omega = \frac{5/2 + \ln 5}{\ln 5} = 2.55}$$

$\eta < \eta_c = 1 - \frac{1}{r_T} = 0.5$;
$\omega > \omega_c = \frac{1}{r_T - 1} = 1$
(teorema di Carnot)

(d)



$\Delta S_{12} = -\Delta S_{34} = nR \ln(V_2/V_1) = nR \ln(V_4/V_3)$

$\Delta S_{14} = -\Delta S_{32} = nc_v \ln \frac{T_A}{T_B}$