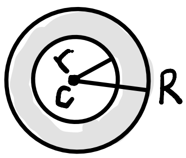
1.

(a) Calcolo del momento di inerzia del cilindro cavo in rotazione attorno all'asse centrale:

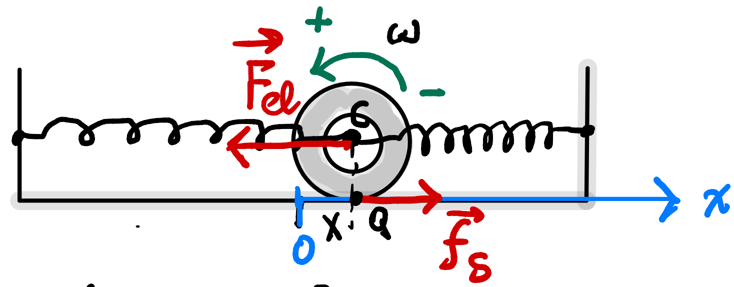


$$I_C = \frac{M_R R^2}{2} - \frac{M_r r^2}{2} \; ; \; \begin{cases} M_R = \sigma \pi R^2 \\ M_r = \sigma \pi r^2 \end{cases} ; \; m = M_R - M_r = \sigma\pi(R^2 - r^2)$$

$$\Rightarrow I_C = \frac{\sigma\pi}{2}(R^4 - r^4) = \frac{\sigma\pi}{2}(R^2-r^2)(R^2+r^2) = \frac{m}{2}(R^2+r^2)$$

In questo caso $r = R/2 \Rightarrow I_C = \frac{5}{8} m R^2 \Leftrightarrow \boxed{K_C = \sqrt{5/8}\, R}$

(b) x è la coordinata del CM, positiva verso "destra";



il rotolamento è puro [in modulo $v = \omega R$];
$\omega = \dot\theta$ è positiva se è antioraria $\Rightarrow \dot x = -R\dot\theta$ e $\boxed{\ddot x = -R\ddot\theta}$

$\Rightarrow$ le leggi di moto, assumendo arbitrariamente che la forza di attrito statica sia verso "destra", sono date da

$$\begin{cases} \vec{F}_{TOT} = m\vec{a} = \vec{F}_{el} + \vec{f}_S \Leftrightarrow m\ddot x = -2kx + f_S \\ \vec{\tau}_C = I_C \vec{\alpha} = \vec{R} \times \vec{f}_S \Leftrightarrow I_C \ddot\theta = R f_S . \end{cases}$$

Si deve porre $F_{el} = -2kx$ perché le due molle agiscono in parallelo.
Combinando le due equazioni tramite la $\ddot x = -R\ddot\theta \Leftrightarrow \ddot\theta = -\ddot x/R$

$$m\ddot x = -2kx + I_C\ddot\theta/R = -2kx - \frac{5}{8}m\ddot x \Leftrightarrow \boxed{\ddot x = -\frac{16}{13}\frac{k}{m}x}$$

che è l'equazione di moto armonico semplice con pulsazione $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{16k}{13m}}}$

(c) Rispetto il punto di contatto istantaneo Q l'equazione della rotazione diventa

$$\tau_Q = +F_{el} \cdot R = 2kxR = I_Q\ddot\theta \, , \; I_Q = I_C + mR^2 = \frac{13}{8}mR^2 , \; \ddot\theta = -\ddot x/R$$

$\Rightarrow \boxed{\ddot x = -\frac{16}{13}\frac{k}{m}x}$ come nel punto (b).

(d) La soluzione generale dell'equazione del moto in x è

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t + \phi)$$

con condizioni $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = v_i \Rightarrow \begin{cases} A \sin\phi = 0 \ , \ \phi = 0 \\ A\omega_0 \cos\phi = A\omega_0 = v_i \end{cases}$

$\Rightarrow$ la soluzione particolare è

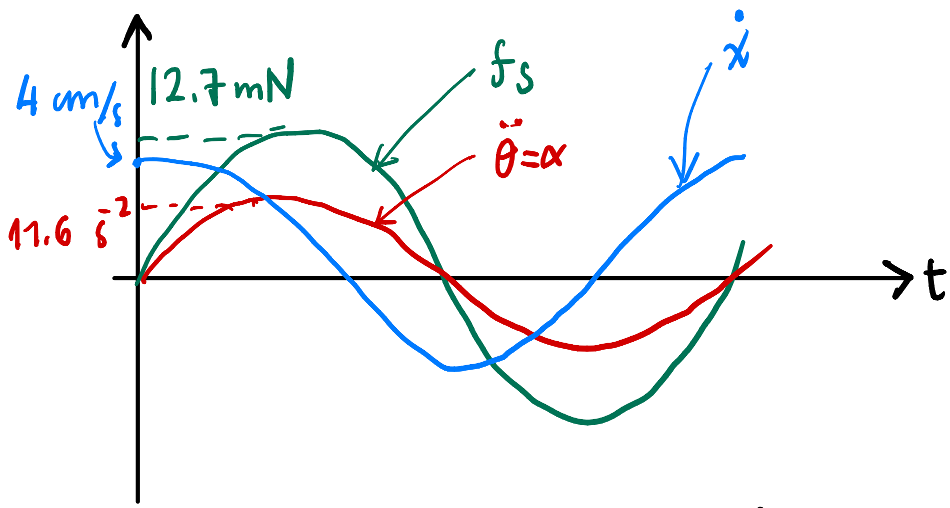
$$x(t) = \frac{v_i}{\omega_0} \sin \omega_0 t \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = v_i \cos \omega_0 t \\ \ddot{x} = -\omega_0 v_i \sin \omega_0 t \end{cases}$$

e $f_s = \dfrac{I_c \ddot{\theta}}{R} = -m \dfrac{K_c^2}{R^2} \ddot{x} = -\dfrac{5}{8} m \ddot{x} = \boxed{+\dfrac{5}{2} v_i \sqrt{\dfrac{m \cdot k}{13}} \sin \omega_0 t}$

$\omega_0 = \sqrt{\dfrac{16}{13} \dfrac{k}{m}} = 14.5 \ s^{-1}$

$\dfrac{5}{2} v_i \sqrt{\dfrac{m \cdot k}{13}} = 12.7 \ mN$

$\dfrac{\omega_0 v_i}{R} = 11.6 \ s^{-2}$



(e) $E = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} I_c \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \cdot 2k x^2 = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \left[1 + \frac{K_c^2}{R^2}\right] + k x^2 =$

$= \frac{13}{16} m \dot{x}^2 + k x^2 = \frac{13}{16} m v_i^2 \cos^2 \omega_0 t + k \frac{v_i^2}{\omega_0^2} \sin^2 \omega_0 t =$

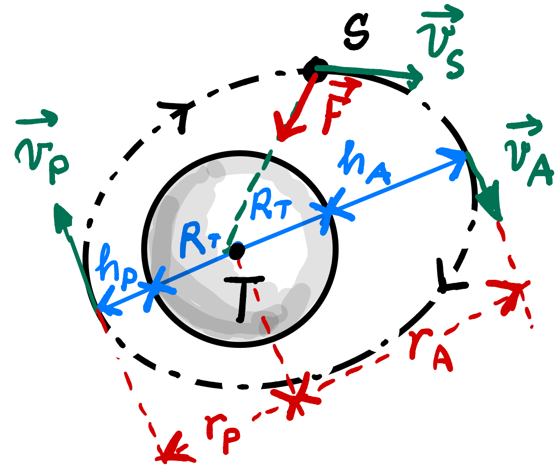
$= \frac{13}{16} m v_i^2 \cos^2 \omega_0 t + \frac{13}{16} m v_i^2 \sin^2 \omega_0 t = \boxed{\frac{13}{16} m v_i^2 = \text{costante} = 4.6 \times 10^{-5} \ J}$

NB $E = E(0) =$ energia solo cinetica (traslazionale e rotazionale) iniziale del cilindro.

(f) L'attrito massimo richiesto è $f_{s\,max} = \frac{5}{2} v_i \sqrt{\frac{m \cdot k}{13}} = 12.7 \ mN$ e non può superare $\mu_s m g \Leftrightarrow \boxed{\mu_s \gtrsim \dfrac{12.7 \times 10^{-3} N}{35 g \times 9.8 m/s^2} \simeq 0.037}$

2.

Le distanze radiali vanno riferite al centro della Terra (un fuoco dell'ellisse):



$$r_P = h_P + R_T \cong 6.60 \times 10^6\ m$$
$$r_A = h_A + R_T \cong 7.32 \times 10^6\ m$$

(a) • Conservazione del momento angolare del satellite rispetto il centro di forze al perigeo e all'apogeo:

$v_P r_P = v_A r_A$ (perché in P e A $\vec{v}$ e $\vec{r}$ sono perpendicolari)

• Conservazione dell'energia meccanica al perigeo / apogeo:

$$E = \frac{1}{2} m v_A^2 - \frac{GmM_T}{r_A} = \frac{1}{2} m v_P^2 - \frac{GmM_T}{r_P} \Leftrightarrow v_A^2 - \frac{2\mu}{r_A} = v_P^2 - \frac{2\mu}{r_P}$$

Sostituendo $v_P = v_A (r_A / r_P) \Rightarrow v_A^2 \left(1 - \frac{r_A^2}{r_P^2}\right) = 2\mu \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_P}\right)$

$$\Rightarrow v_A^2 \left[\frac{(r_P + r_A)\cancel{(r_P - r_A)}}{r_P^{\cancel{2}}}\right] = 2\mu \left(\frac{\cancel{r_P - r_A}}{r_A \cancel{r_P}}\right) \Rightarrow$$

$$\boxed{v_A = \sqrt{\frac{2\mu r_P}{r_A (r_A + r_P)}} \ ; \quad v_P = \sqrt{\frac{2\mu r_A}{r_P (r_A + r_P)}}}$$

Valori numerici: $\boxed{v_A \cong 7.19\ km/s \ ; \quad v_P \cong 7.97\ km/s}$

(b) Energia meccanica per unità di massa: $\varepsilon = E/m = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = \text{cost.}$

Per esempio al perigeo $\boxed{\varepsilon = \frac{v_P^2}{2} - \frac{\mu}{r_P} = \frac{\mu r_A}{r_P (r_P + r_A)} - \frac{\mu}{r_P} = -\frac{\mu}{r_A + r_P}}$.

Valore numerico: $\boxed{\varepsilon \cong -2.86 \times 10^7\ J/kg < 0}$ perché l'orbita è chiusa (ellittica)

(c) Con la conservazione dell'energia: $\frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = \mathcal{E} = -\frac{\mu}{r_A + r_P}$

$$\Rightarrow \boxed{v = \sqrt{2\mu\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_A + r_P}\right)}}$$

(d) Il momento angolare "specifico" – per unità di massa riferito al centro della Terra è in modulo (preso in $r = r_P$):

$$\frac{L_T}{m} = \ell_T = r_P v_P = \boxed{\sqrt{2\mu \frac{r_A r_P}{r_A + r_P}} \cong 5.26 \times 10^{10}\ m^2/s}\ .$$

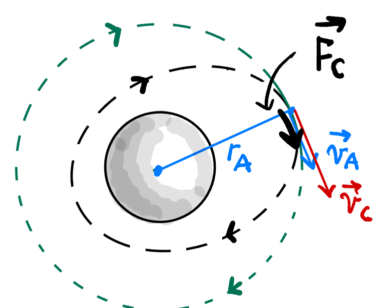
Si ricorda il risultato per la velocità di area spazzata dal satellite (II legge di Kepler):

$$\frac{dA}{dt} = \frac{|\vec{L}_T|}{2m} = \frac{\ell_T}{2} \quad \text{(costante, metà di } \ell_T\text{)}$$

(e) L'orbita circolare con raggio r_A attorno alla Terra deve avere velocità v_c tale che

$v_c = \sqrt{\mu / r_A}$ (dalla $F = ma = mv^2/r_A = GmM/r_A^2$);

$v_c \cong 7.38$ km/s



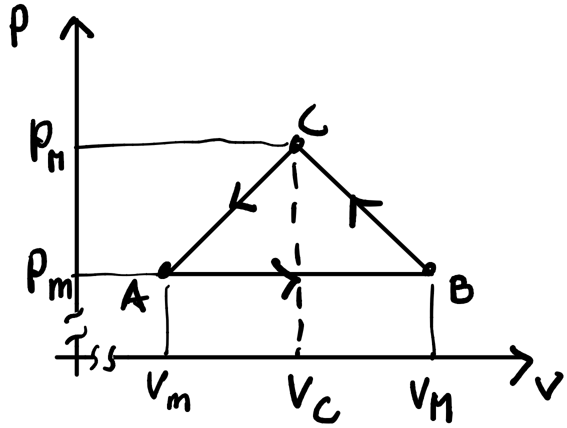
ma nell'orbita ellittica la velocità all'apogeo è $v_A = \sqrt{\frac{2\mu\, r_P}{r_A(r_A + r_P)}}$ che è minore di v_c (numericamente ma anche dalla formula, $\frac{v_A}{v_c} = \sqrt{\frac{2r_P}{r_A + r_P}} < 1$). In ogni caso per entrare in orbita circolare bisogna accelerare "in avanti" lo Sputnik quindi con una forza tangenziale $\vec{F}_c$.

L'aumento di velocità è dato in modulo da

$$\boxed{\Delta v = v_c - v_A = \sqrt{\frac{\mu}{r_A}}\left(1 - \sqrt{\frac{2r_P}{r_A + r_P}}\right) \simeq 7.38\,(1 - 0.97)\,\frac{km}{s} \simeq 193\,\frac{m}{s}}$$

3.

(a) Percorrenza antioraria del ciclo:



le coordinate dei tre punti nel diagramma PV sono

A: (V_m, P_m); B: (V_M, P_m); C: (V_C, P_M)

e, per la simmetria del triangolo, $V_C = \frac{V_A+V_B}{2} = \frac{V_m+V_M}{2}$.

Per calcolare il COP del ciclo si osserva che il calore viene assorbito dal frigorifero solo nel tratto isobaro $A \to B$ e vale

$$Q_{AB} = nc_p(T_B - T_A) = nc_p\left(\frac{P_mV_M}{nR} - \frac{P_mV_m}{nR}\right) = \frac{c_p P_m}{R}(V_M - V_m) > 0$$

Lungo il lato obliquo $C \to A$ il calore è necessariamente ceduto dal frigorifero perchè si può scrivere

$Q_{CA} = \Delta U_{CA} + W_{CA}$ con $T_A < T_C$ e quindi $Q_{CA} < 0$ ($W_{CA} < 0$!)

Di conseguenza, viste le premesse, anche $Q_{BC} < 0$: allora in questo ciclo i tratti obliqui realizzano costantemente cessione di calore e $Q_{IN} = Q_{AB}$.

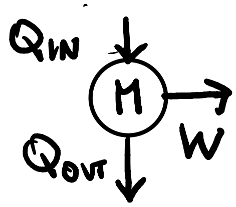
Dalla definizione $COP = Q_{IN}/|W| = Q_{AB}/|W|$

e $|W|$ è l'area del ciclo: $|W| = \frac{(V_M - V_m)(P_M - P_m)}{2}$

$$\Rightarrow COP_\Delta = \frac{\frac{c_p P_m}{R}(V_M - V_m)}{(V_M-V_m)(P_M-P_m)/2} = \frac{2c_p P_m/R}{P_M - P_m} = \frac{2c_p}{R}\frac{1}{\Pi - 1} \Rightarrow$$

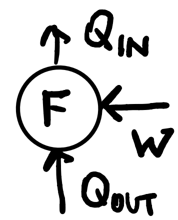
$$\boxed{COP_\Delta = \frac{7}{\Pi - 1}}$$ per $c_p = \frac{7}{2}R$ (gas ideale biatomico).

(b) Per determinare la relazione generale tra efficienza η e COP della stessa macchina reversibile si confrontano



$$\eta = \frac{W}{Q_{IN}} ; \quad W = Q_{IN} - Q_{OUT}$$

$$\Rightarrow \eta = 1 - \frac{Q_{OUT}}{Q_{IN}}$$



$$COP = \frac{Q_{OUT}}{-W} ; \quad W = Q_{OUT} - Q_{IN}$$

$$\Rightarrow COP = \frac{Q_{OUT}}{Q_{IN} - Q_{OUT}}$$

(NB: $W<0$!)

$$\Rightarrow \boxed{\eta = \frac{1}{COP+1} \Rightarrow \eta_\Delta = \frac{1}{COP_\Delta + 1} = \frac{\Pi - 1}{\Pi + 6}}$$

(c) $\boxed{\text{Se } \Pi = 1.2 \Rightarrow \eta_\Delta = 0.028 ; \quad COP_\Delta = 35}$

(d) Il confronto con Carnot parte dalle relazioni
$$\begin{cases} \eta_{carnot} = 1 - \dfrac{T_m}{T_M} , \\ COP_{carnot} = \dfrac{T_m}{T_M - T_m} \end{cases}$$

Sapendo che $\Pi = 1.2$ e $\Phi = 1{,}4$ si ottiene

$$\frac{T_M}{T_m} = \frac{P_M}{P_m} \frac{(V_M + V_m)}{2V_m} = \Pi \cdot \left(\frac{\Phi+1}{2}\right) = 1.44$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\eta_{carnot} = 0.31 > \eta_\Delta \qquad COP_{carnot} = 2.27 < COP_\Delta}$
in accordo con il teorema di Carnot.

(e) Si utilizza la relazione per la variazione di entropia del gas ideale
$$\Delta S_{if} = n c_v \ln(T_f/T_i) + nR \ln(V_f/V_i) = $$
$$= n c_p \ln(T_f/T_i) - nR \ln(P_f/P_i)$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta S_{AB}}{nR} = c_p \ln \Phi$$

$$\frac{\Delta S_{BC}}{nR} = c_v \ln \Pi + c_p \ln \frac{\Phi+1}{2\Phi} ;$$

$$\frac{\Delta S_{CA}}{nR} = -c_v \ln \Pi - c_p \ln \frac{\Phi+1}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \Delta S_{TOT} = 0 \quad \text{e} \\ \Delta S_{AB} = +19.6 \text{ J/K} \\ \Delta S_{BC} = -1.4 \text{ J/K} \\ \Delta S_{CA} = -18.2 \text{ J/K.} \end{array}}$$