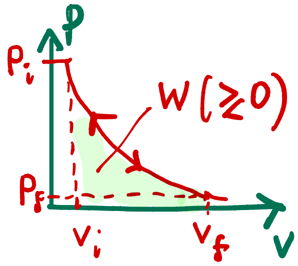
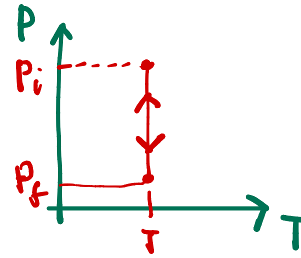
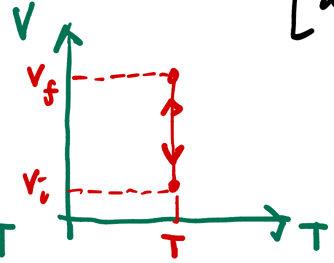
- Processi con $T =$ costante, isotermi [necessariamente quasi-statici altrimenti T non è definita]





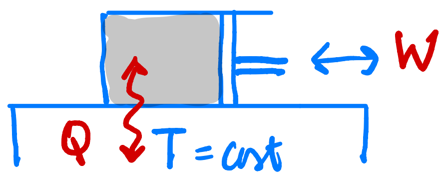


equazione di processo

$PV =$ costante (nRT)

$\Rightarrow$ iperbole equilatera in PV

Si può immaginare un cilindro diatermico (conduttore) con un pistone mobile in contatto con un serbatoio a temperatura T

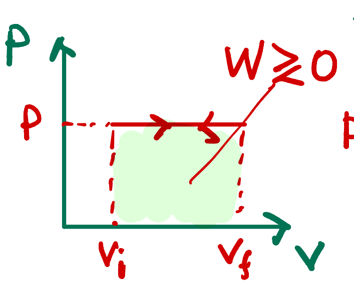


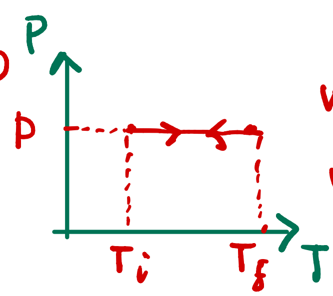
Bilancio energia: $\Delta U = n c_V \Delta T = 0 \iff Q = W = \int_{V_i}^{V_f} P\,dV$

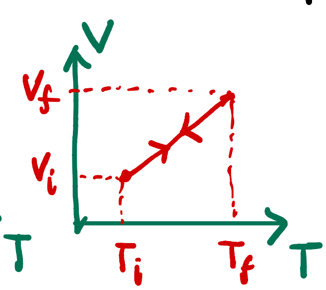
$$\Rightarrow \quad Q = W = nRT \ln \frac{V_f}{V_i} = nRT \ln \frac{P_i}{P_f}$$ (attenzione al segno di $Q = W$)

è conversione totale di calore (entrante/uscente) in lavoro (fatto/subito).

- Processi con $P =$ costante, Isobari [quasi-statici, altrimenti P non è definita]







equazione di processo

$\frac{V}{T} =$ costante (nR/P)

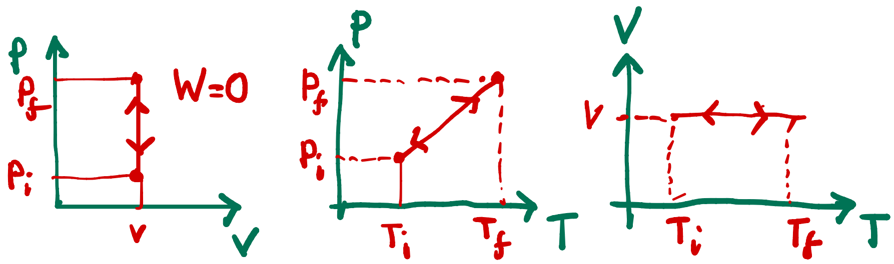
Per realizzare questo tipo di trasformazione il gas deve cambiare con continuità la sua temperatura.

Bilancio energia: $\Delta U = n c_V \Delta T = n c_p \Delta T - W, \quad W = P\Delta V = P(V_f - V_i)$

ma anche $\Delta U = \frac{c_V}{R} \cdot P(V_f - V_i) = \begin{cases} 3/2\, P\Delta V & \text{(monoatomico)} \\ 5/2\, P\Delta V & \text{(biatomico)} \end{cases} = nR\Delta T$

e $Q = n c_p \Delta T = \frac{c_p}{R} P(V_f - V_i) = \begin{cases} 5/2\, P\Delta V & \text{(monoatomico)} \\ 7/2\, P\Delta V & \text{(biatomico)} \end{cases}$

- Processi con $V =$ costante, isocori [non necessariamente quasi-statiche: qui lo dobbiamo specificare!]



equazione di processo
$$P/T = \text{costante} \quad \left(\frac{nR}{V}\right)$$

Bilancio energia: $W=0 \Leftrightarrow \Delta U = Q = n c_v \Delta T = \frac{c_v}{R} V(P_f - P_i) = \begin{cases} \frac{3}{2} V\Delta P \text{ (monoat.)} \\ \frac{5}{2} V\Delta P \text{ (biat.)} \end{cases}$

Anche in questo caso il gas deve variare con continuità la sua temperatura.

- Processi senza scambi termici, adiabatici, $Q=0$ [si richiede di tipo quasi-statico]

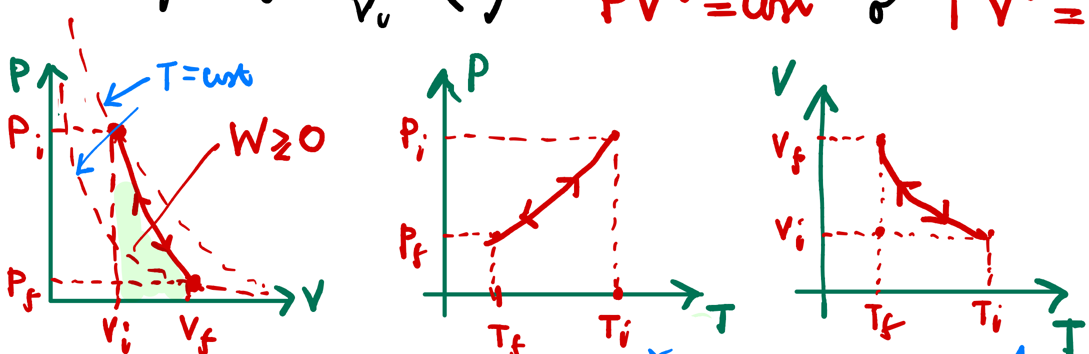
Osservazione iniziale: se $Q=0 \Leftrightarrow \Delta U = -W = n c_v \Delta T = \frac{c_v}{R}(P_f V_f - P_i V_i)$.

Per rappresentare il processo su diagrammi di stato consideriamo

$$\begin{cases} \delta Q = n c_v dT + P dV = 0 \\ \delta Q = n c_p dT - V dP = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n c_v dT = -P dV \\ n c_p dT = +V dP \end{cases}$$ dividendo: $\frac{c_p}{c_v} = -\frac{dP/P}{dV/V}$

Si scrive $\gamma \equiv c_p/c_v$ $\left(\begin{matrix} 5/3 \text{ monoat.} \\ 7/5 \text{ biat.} \end{matrix}\right)$ e $\frac{dP}{P} = -\gamma \frac{dV}{V}$; integrando

$$\ln P_f/P_i = -\gamma \ln \frac{V_f}{V_i} \Leftrightarrow PV^\gamma = \text{cost} \quad o \quad TV^{\gamma-1} = \text{cost} \quad o \quad P^{1-\gamma} T^\gamma = \text{cost}$$



$P = \text{cost} \cdot V^{-\gamma}$ $\quad$ $P = \text{cost} \cdot T^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$ $\quad$ $V = \text{cost} \cdot T^{\frac{1}{1-\gamma}}$

Le equazioni di processo sono tre nei diagrammi disegnati.

Si possono anche scrivere per il lavoro le espressioni

$$W = -\Delta U = \frac{c_v}{R}(P_i V_i - P_f V_f) = \frac{P_i V_i - P_f V_f}{\gamma - 1} = \frac{nR}{\gamma-1}(T_i - T_f).$$

C'è anche una classe più generale di trasformazioni quasi-statiche di un gas ideale che include tutti i processi appena studiati come casi particolari.

Parliamo di trasformazioni POLITROPICHE nella forma $PV^k = \text{costante}$

Calcolo del calore specifico associato: $\delta Q = n c_v dT + P dV = n c_v dT + nRT \frac{dV}{V}$

$$\Rightarrow c = \frac{1}{n}\left(\frac{\delta Q}{dT}\right) = c_v + R\,\frac{dV/V}{dT/T} \quad \text{con} \quad PV^k = \text{cost} \Leftrightarrow TV^{k-1} = \text{cost}$$

$$\Rightarrow d\left(TV^{k-1}\right) = 0 \Leftrightarrow V^{k-1}dT + T(k-1)V^{k-2}dV = 0 \Leftrightarrow \frac{dT}{T} + (k-1)\frac{dV}{V} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dV/V}{dT/T} = \frac{1}{1-k} \qquad \Rightarrow c = c_v + \frac{R}{1-k} = c_v + \frac{c_p - c_v}{1-k} = \boxed{c_v\left[\frac{\gamma - k}{1-k}\right]}$$

Inoltre: $\Delta U = n c_v \Delta T$; $Q = n c \Delta T$;

$$W = Q - \Delta U = n\Delta T\left(c - c_v\right) = n c_v \Delta T\left[\frac{\gamma - 1}{1-k}\right] = \frac{nR\Delta T}{1-k}$$

Notare che si ottengono processi
- adiabatici, $k = \gamma$ → $PV^\gamma = \text{cost}$
- isotermi, $k = 1$ → $PV = \text{cost}$
- isobari, $k = 0$ → $P = \text{cost}$
- isocori, $k = \infty$ → $V = \text{cost}$

k	ΔU	c	Q	W
γ	$n c_v \Delta T$	0	0	$-n c_v \Delta T$
0	$n c_v \Delta T$	c_p	$n c_p \Delta T$	$nR\Delta T$
∞	$n c_v \Delta T$	c_v	$n c_v \Delta T$	0
1	0	∞	...	...

Il caso isotermo si ottiene con un limite:

$$\Delta T = T_i\left(\frac{T_f}{T_i} - 1\right) = T_i\left[\left(\frac{V_i}{V_f}\right)^{k-1} - 1\right]$$

$$\Rightarrow W = -nRT_i\,\frac{\left(V_i/V_f\right)^{k-1} - 1}{k-1} \xrightarrow[k\to 1]{} -nRT_i\,\frac{(k-1)\ln\left(V_i/V_f\right)}{k-1}$$

$$\Rightarrow W = nRT \cdot \ln\left(V_f/V_i\right)$$