Consideriamo ora una panoramica iniziale dedicata ai processi di trasporto termico di energia, ossia ai fenomeni nei quali si assiste al passaggio di energia in qualche forma causato da distribuzioni non uniformi (ossia gradienti) di temperatura.

Nelle parti precedenti del corso si è infatti spesso discusso del «calore» come «modo di trasferire energia» in varie situazioni di interesse termodinamico relativamente ai due principi, alla temperatura, al funzionamento di macchine e così via. Però non si è mai chiarito a livello più fisico e fondamentale cosa sia il calore.

Qui proviamo a completare questo schema:

Perché: ΔT $\longrightarrow$ Cosa: Q $\longrightarrow$ Come: ?

anche se ci limiteremo a brevi considerazioni iniziali, perché l'argomento è molto complesso, esteso e sofisticato da un punto di vista matematico.

Partendo da una distribuzione (campo) di temperatura non uniforme – e volendo neppure stazionaria nel tempo – i processi di trasporto di energia che possono avere luogo sono di questo tipo:

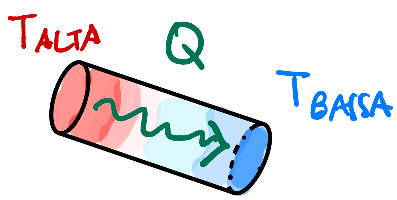
ΔT

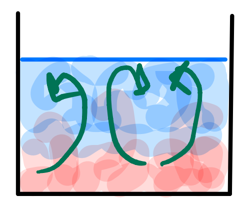
- In presenza di materia
  - ↓ Interazioni fra atomi, molecole, elettroni, ...
    - ↓ nessun movimento macroscopico → conduzione
    - ↓ moti fluidi → convezione
      - naturale
      - forzata
- In assenza di materia
  - ↓ onde elettromagnetiche
    - ↓ irraggiamento
      [termodinamica ma anche elettromagnetismo e fisica quantistica]

Qui ci limitiamo a qualche approfondimento sui fenomeni conduttivi che avvengono in materiali (solidi o fluidi) a causa di urti tra costituenti "elementari" della sostanza che risulta, internamente o esternamente, caratterizzata da distribuzioni non uniformi di temperatura.

È importante chiarire subito che la conduzione non è trasporto materiale di alcunché: è energia in diffusione, secondo un modello di trasferimento collisionale di energia di moto (vibrazionale, per esempio), come succede in una "ola" da stadio. Le collisioni tipicamente riguardano atomi, molecole ma anche elettroni (nei metalli, nei quali si assiste infatti anche e contestualmente alla conduzione elettrica, che è legata strettamente a quella termica).

Ragioniamo quindi su un modello elementare di diffusione o conduzione termica dovuta al gradiente di temperatura in un oggetto solido (e allora c'è solo conduzione) oppure fluido (e allora la conduzione innesca fenomeni di trasporto di materia a varie temperature di natura convettiva: può essere "spontanea", che avviene cioè naturalmente, ma anche "aiutata" da ventilazione artificiale, o "forzata").





Ci muoviamo secondo l'approccio matematico di J. Fourier che nel 1822 propone la teoria del «flusso calorico», che funziona benissimo anche se è basata sull'idea di un fluido (in realtà inesistente) detto appunto «calorico» che dovrebbe essere il vettore di trasporto termico: questo è un caso tipico di «strumentalismo», ovvero di successo solo formale di un modello errato.

Iniziamo con un "campo di temperatura", ovvero una funzione del posto ed eventualmente del tempo a valori scalari

$$T = T(x,y,z;t) = T(\vec{r},t).$$

Perché avvenga un processo di trasporto termico questo campo non può essere uniforme, ovvero dovrà essere caratterizzato da un certo gradiente, in

seguito al quale nascerà un "flusso termico", definito da un passaggio di energia per unità di tempo e di area e con una direzione nello spazio. Si prende in considerazione un « volume di controllo » delimitato da una superficie interessata dal flusso termico (in $J/_{s \cdot m^2} = W/_{m^2}$ nel SI):

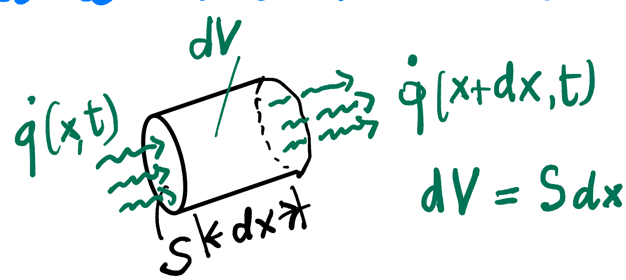
FLUSSO $\vec{j}(\vec{r},t)$; il modulo è indicato da $\dot{q} = |\vec{j}|$

La potenza termica (in watt) riferita alla superficie di controllo S è quindi calcolata come $\dot{Q} = S\dot{q}$ (watt nel SI).

A causa di un campo $T(\vec{r},t)$ non uniforme nasce il flusso $\vec{j}(\vec{r},t)$.

Qual è la relazione matematica che connette T e $\vec{j}$?

Primo passo: bilancio energetico relativo al volume di controllo infinitesimo dV.



Ci si aspetta in generale che il flusso entrante e quello uscente non siano uguali se il materiale di cui è fatto il volumetto è in grado di scambiare energia ovvero se ha una capacità termica finita.

Innanzitutto si può scrivere così la differenza tra flussi sui due

« tappi » del volumetto dV :

$$\delta \dot{q} = \dot{q}(x,t) - \dot{q}(x+dx,t) = -\frac{\partial \dot{q}}{\partial x} \cdot dx$$

per definizione solita di derivata (usiamo il simbolo ∂ di derivata parziale perché in generale $\dot{q}$ è funzione anche di t)

Se c'è energia (per unità di tempo e di area) che si accumula (o dirada) in dV questa risponde alla relazione

$$\delta \dot{q} = \dot{q}(x) - \dot{q}(x+dx) = \frac{1}{S}\delta \dot{Q}$$

dove $\delta \dot{Q}$ è la variazione istantanea (nel tempo, cioè) del flusso infinitesimo di potenza termica che è a sua volta associato alla variazione infinitesima di temperatura del volumetto di controllo di massa Δm secondo la

$$\delta Q = c\, dm\, dT \quad \text{ovvero} \quad \delta \dot{Q} = c\, dm \frac{\partial T}{\partial t}$$

[derivata $\frac{\partial T}{\partial t}$ perché T dipende anche da $\vec{r}$]

Combinando le due relazioni

$$\delta \dot{Q} = c \cdot dm \frac{\partial T}{\partial t} = c \cdot \rho\, dV \frac{\partial T}{\partial t} = c \cdot \rho \cdot S\, dx \frac{\partial T}{\partial t} =$$

$$= S\, \delta \dot{q} = -S \frac{\partial \dot{q}}{\partial x} \cdot dx \Rightarrow \frac{\partial \dot{q}}{\partial x} = -\rho \cdot c \cdot \frac{\partial T}{\partial t}.$$

Questa relazione esprime, in una sola direzione x, la "continuità" del flusso termico $\dot{q}$ collegandone la sua variazione (gradiente) spaziale con l'eventuale variazione di temperatura in quel luogo (che c'è infatti se $\dot{q}$ prevede accumulo – positivo o negativo – di energia nel materiale).

Questa relazione può essere generalizzata in forma vettoriale a partire dal vettore di flusso

$$\vec{J} \equiv (\dot{q}_x, \dot{q}_y, \dot{q}_z) \quad \text{e} \quad \frac{\partial \dot{q}_x}{\partial x} + \frac{\partial \dot{q}_y}{\partial y} + \frac{\partial \dot{q}_z}{\partial z} = -c \cdot \rho \frac{\partial T}{\partial t}$$

che si può scrivere

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -c \cdot \rho \cdot \frac{\partial T}{\partial t}$$

equazione di continuità per il flusso $\vec{J}$

dove si è introdotta la « divergenza » del campo vettoriale $\vec{J}$, $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = \operatorname{div} \vec{J} = \frac{\partial \dot{q}_x}{\partial x} + \frac{\partial \dot{q}_y}{\partial y} + \frac{\partial \dot{q}_z}{\partial z}$.

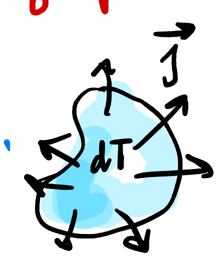
Sostanzialmente il campo del flusso termico ha una "divergenza" non nulla quando i contributi di energia entrante e uscente in un dato volume non sono bilanciati. La conseguenza diretta è che la temperatura del materiale non può rimanere costante nel tempo.

La relazione $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + c \cdot \rho \frac{\partial T}{\partial t} = 0$ può essere anche integrata sul volume infinitesimo di controllo:

$$\int_{VOL} \left[\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + c \cdot \rho \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \right] dV = 0 \quad \text{ovvero} \quad \int_{VOL} \vec{\nabla} \cdot \vec{J} \, dV = -\frac{d}{dt} \int_{VOL} c \cdot \rho \cdot T \, dV .$$

Un importante teorema matematico (di Gauss) dimostra che l'integrale di volume di $\vec{\nabla} \cdot \vec{J}$ è uguale al flusso di $\vec{J}$ attraverso la superficie che delimita il volume:

$$\int_{VOL} \vec{\nabla} \cdot \vec{J} \, dV = \int_{sup(VOL)} \vec{J} \cdot d\vec{A} = \text{FLUSSO di } \vec{J} = -\frac{d}{dt} \int_{VOL} c \cdot \rho \, T \, dV .$$

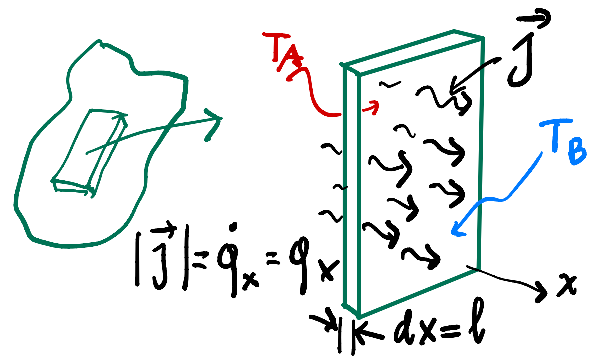


$\frac{d}{dt}(c \cdot \rho T)$ misura la variazione temporale della densità di energia del materiale $(c \cdot \rho \cdot \Delta T = C \cdot \Delta T / VOL = Q / VOL)$.

Quindi il flusso di $\vec{J}$ non bilanciato varia questa densità di energia ed è dunque il flusso termico NETTO uscente.

Fourier propone una dipendenza empirica tra flusso termico e distribuzione non uniforme di temperatura, come infatti dovrebbe accadere in condizioni di non-equilibrio termico e, inoltre, in un verso fissato dal II principio della termodinamica, ovvero spontaneamente da T_{CALDO} a T_{FREDDO}.

Per rendere esplicita e formale questa dipendenza tra $\dot q$ e T, si considera una semplice geometria, nella quale il materiale sottoposto a gradiente di temperatura è una sottile lamina a facce piane e parallele. Questo è in ogni caso un buon punto di partenza anche per geometrie più complicate, pur di prendere piccole porzioni spaziali di esse.



La legge (empirica) di Fourier prevede una proporzionalità diretta tra il flusso $\dot q$ e il gradiente termico ai lati della lamina, ovvero una legge del tipo

$$\dot q = -k \frac{\Delta T}{\ell}$$

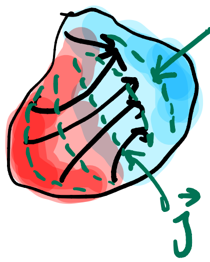
e, presa la lamina di spessore infinitesimo lungo x,

$$\dot q_x = -k \frac{\partial T}{\partial x}.$$

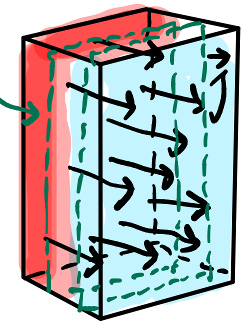
[usiamo la derivata $\partial/\partial x$ perché in generale $T = T(x,t)$]

Importante:

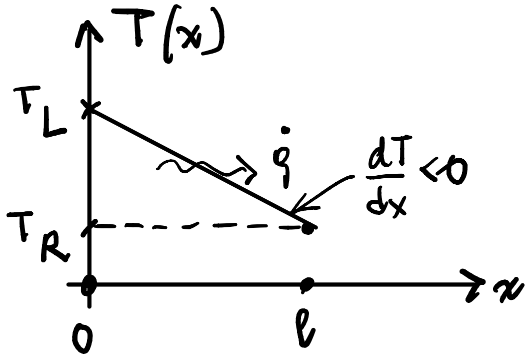
- k si chiama "conducibilità termica" (nel SI si misura in $\frac{W}{m \cdot K}$)
- $k > 0$ e dunque il segno "−" nella legge di Fourier esprime la direzione spontanea del flusso termico da T alta a T bassa: se $T_A > T_B \Rightarrow \Delta T < 0$ e $\dot q > 0$ se $k > 0$.
- C'è anche la versione tridimensionale: $\vec J = -k \vec\nabla T$, ovvero il campo di flusso è il gradiente del campo di temperatura:



T=cost: superfici isoterme perpendicolari alle linee di flusso $\vec{j}$



Esplicitamente, nel caso in una sola dimensione,



se $\frac{\partial T}{\partial x}$ è costante, allora per la legge di Fourier, $\partial T/\partial x = C$ $\Rightarrow$

$T = Cx + B$ con $T(x=0) = B = T_L$ e

$T(x=\ell) = C\cdot\ell + B = C\cdot\ell + T_L = T_R$

$\Rightarrow$ $C = (T_R - T_L)/\ell$ e dunque $T(x) = \frac{T_R - T_L}{\ell}x + T_L$.

Le variazioni $\Delta T = T_L - T_R$ riferite allo spessore ℓ determinano il flusso in funzione della maggiore o minore conducibilità termica del materiale.

È possibile anche dire che, per un dato flusso termico $\dot{q}$ e un dato spessore del materiale, il salto di temperatura è tanto minore quanto "migliore" è il conduttore, ovvero quanto più grande è la sua conducibilità k: per esempio, confrontando vetro ($k_V \sim 1 \frac{W}{K\cdot m}$) e aria ($k_A \sim \frac{1}{40}\frac{W}{K\cdot m}$), posto $T_L = 30°C$ e $T_R = -10°C$, $d = 1$ cm si ha per i flussi

$$|\dot{q}_A| = k_A \frac{(T_L - T_R)}{d} = 100 \ \frac{W}{m^2} \ ; \quad |\dot{q}_V| = k_V \frac{(T_L - T_R)}{d} = 4000 \ W/m^2$$

(nel mezzo più conduttivo – vetro – il flusso termico a parità di spessore e ΔT applicato è maggiore di quello nel mezzo più isolante – aria). La potenza termica netta si ottiene moltiplicando il flusso $\dot{q}$ per l'area della lamina.

Si può anche dire che, a parità di flusso termico, per ottenere la stessa variazione di temperatura lo spessore della lamina necessario è direttamente proporzionale alla conducibilità termica.

È importante riunire in un'unica espressione matematica le due relazioni fino a qui discusse, ovvero

continuità, $\vec{\nabla}\cdot\vec{J} = -c\cdot\rho \frac{\partial T}{\partial t}$; legge di Fourier, $\vec{J} = -k\vec{\nabla}T$.

Lo facciamo in una sola dimensione:

$$\frac{\partial \dot{q}}{\partial x} = -c\cdot\rho \frac{\partial T}{\partial t}, \quad \dot{q} = -k\frac{\partial T}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial \dot{q}}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right) \Rightarrow \boxed{\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right) = c\cdot\rho\frac{\partial T}{\partial t}}$$

Questa è l'equazione di Fourier per il trasporto termico conduttivo in una dimensione; quando è possibile considerare costante su tutto il mezzo la conducibilità, questa equazione diventa

$$k\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = c\cdot\rho\frac{\partial T}{\partial t} \quad \text{ovvero} \quad \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{c\cdot\rho}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad \text{o anche} \quad \boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}}$$

nella quale si introduce il parametro $\alpha = \frac{k}{c\cdot\rho}$ detto DIFFUSIVITÀ termica (si misura in m^2/s nel SI) ed è dunque il rapporto tra la «disponibilità» al trasporto termico conduttivo e la misura specifica di capacità di "utilizzo" dell'energia, $c\cdot\rho$.

L'equazione di Fourier è di tipo "PDE" o «differenziale alle derivate parziali» (di tipo parabolico) e può essere molto complicata da risolvere.

La forma in 3 dimensioni dell'equazione di Fourier diventa

$$\vec{\nabla}\cdot(k\vec{\nabla}T) = k\nabla^2 T = \rho\cdot c\, \partial T/\partial t \Leftrightarrow \boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha\nabla^2 T}$$

Se ci sono sorgenti (o "buchi") termici vanno aggiunte alla equazione di continuità nella forma

$$c\cdot\rho\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial \dot{q}}{\partial x} \pm \dot{q}_{INT} \quad \left[\text{dimensione di } \dot{q}_{INT} \ \frac{\text{watt}}{m^3}\right].$$