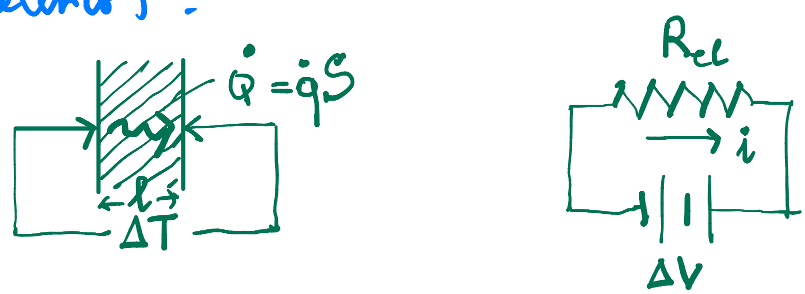
I fenomeni di conduzione termica sono in certa misura confrontabili sia a livello fisico che modellistico ai processi di conduzione elettrica, ovvero le leggi di Fourier e di Ohm hanno vari punti di contatto. Considerando che le leggi di Ohm sono abbastanza famigliari (e comunque più di quelle di Fourier del calore) vale la pena considerare un pò più in dettaglio questa similitudine.

Si confrontano il flusso termico (o, più esattamente, il flusso di potenza termica) e la corrente elettrica: entrambe le grandezze caratterizzano un passaggio di energia in un mezzo conduttivo (per meccanismi differenti, per lo più) generato da un « motore »; nel caso termico la causa è una differenza di temperatura ai capi del materiale, in quello elettrico la causa è la differenza di potenziale (ovvero la presenza di campo elettrico):



$$|\dot Q| = |\dot q| S = k S \frac{\Delta T}{\ell} \qquad |i| = \frac{\Delta V}{R_{el}} \;;\; R_{el} = \rho_{el} \cdot \ell / S = \frac{1}{\sigma_{el}} \frac{\ell}{S}$$

$$\Rightarrow |\dot Q| = \frac{\Delta T}{R_t}, \quad R_t = \frac{1}{k} \frac{\ell}{S}$$

σ_{el} è la conducibilità elettrica, ρ_{el} è la resistività elettrica

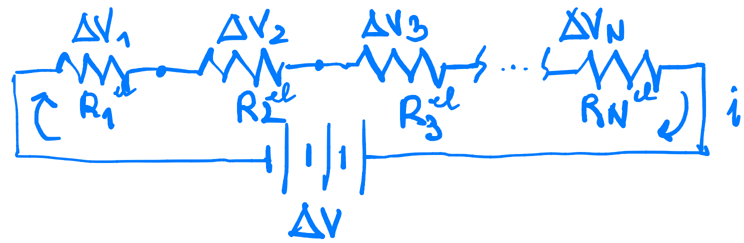
Quindi si può fare il paragone $\dot Q \leftrightarrow i$, $\Delta T \leftrightarrow \Delta V$, $k \leftrightarrow \sigma_{el}$ introduce la resistenza termica del materiale

$R_t = \frac{1}{k} \frac{\ell}{S}$ $\left[\frac{K}{watt} \text{ nel SI}\right]$ ma anche la resistenza termica specifica: $r_t = R_t \cdot S = \ell / k$ $\left[\frac{K \cdot m^2}{watt} \text{ nel SI}\right]$.

La r_t è tale che $\dot q = \frac{\Delta T}{r_t}$.

La similitudine può essere sfruttata in varie situazioni. Per esempio permette di trattare con relativa semplicità configurazioni con materiali di differente conducibilità posti a contatto in varie geometrie e disposizioni, come accade in un circuito elettrico con varie resistenze collegate.

Consideriamo per esempio più resistenze elettriche in serie:

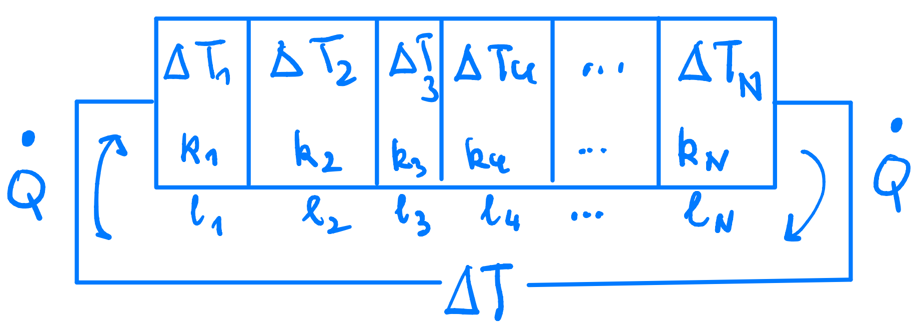


La conservazione dell'energia implica

$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2 + \dots + \Delta V_N = i\,(R_1^{el} + R_2^{el} + \dots + R_N^{el})$$

quindi $i = \dfrac{\Delta V}{R^{el}_{TOT}}$ con $R^{el}_{TOT} = \sum_{i=1}^{N} R_i^{el}$ resistenza elettrica totale.

L'analogo termico si costruisce realizzando un pacchetto ("sandwich" o serie) di lamine con eventualmente differenti conducibilità termica o, per meglio dire, resistenza termica, $R_i = l_i / k_i S_i$



Ancora la conservazione del flusso / energia:

$$\Delta T = \Delta T_1 + \Delta T_2 + \dots + \Delta T_N = \dot{Q}\,(R_1^t + R_2^t + \dots + R_N^t)$$

quindi $\dot{Q} = \dfrac{\Delta T}{R^t_{TOT}}$ con $R^t_{TOT} = \sum_i R_i^t = \dfrac{1}{S}\sum \dfrac{l_i}{k_i}$ resistenza termica totale.

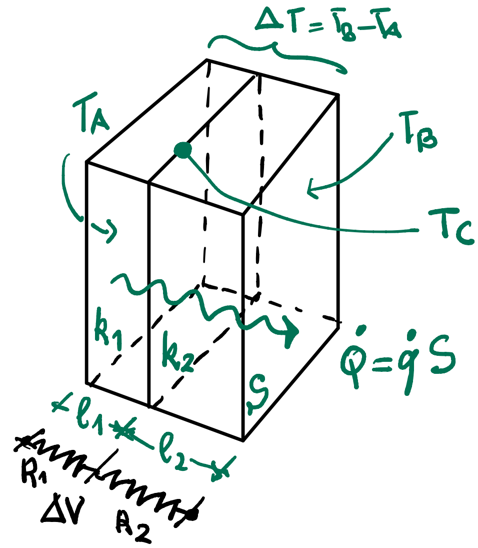
[Si può anche scrivere direttamente $\dot{q} = \dfrac{\dot{Q}}{S} = \dfrac{\Delta T}{r^t_{TOT}}$, $r^t_{TOT} = \sum_i l_i / k_i$].

Le "cadute di temperatura" sulle singole lamine, analogamente a quelle di potenziale, sono date da

$$\Delta T_i = \dot{Q} R_i^t = \Delta T \frac{R_i^t}{\sum_i R_i^t} = \Delta T \frac{l_i / k_i}{\sum_i l_i / k_i}$$

Esempio con 2 lamine "in serie":
$\dot Q$ è conservato (il flusso/corrente) e generato da ΔT; la continuità attraverso le due lamine quindi diventa

$$\dot Q = \dot Q_1 = \dot Q_2 = -S\frac{k_1}{\ell_1}(T_C - T_A) = -S\frac{k_2}{\ell_2}(T_B - T_C)$$



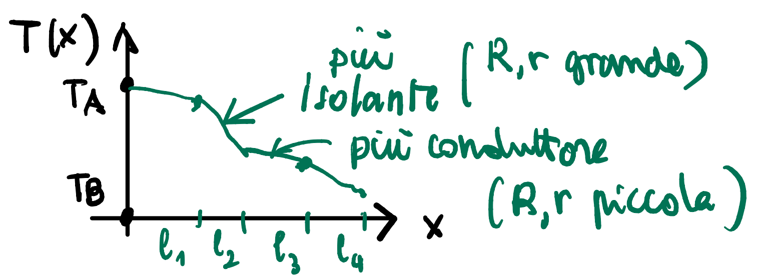
dove T_C è la temperatura alla separazione tra le lamine.

Risolvendo: $T_C = \left(\frac{k_1}{\ell_1}T_A + \frac{k_2}{\ell_2}T_B\right)\Big/\left(\frac{k_1}{\ell_1} + \frac{k_2}{\ell_2}\right) = \frac{T_A/r_1 + T_B/r_2}{1/r_1 + 1/r_2} = \frac{r_2 T_A + r_1 T_B}{r_1 + r_2}$

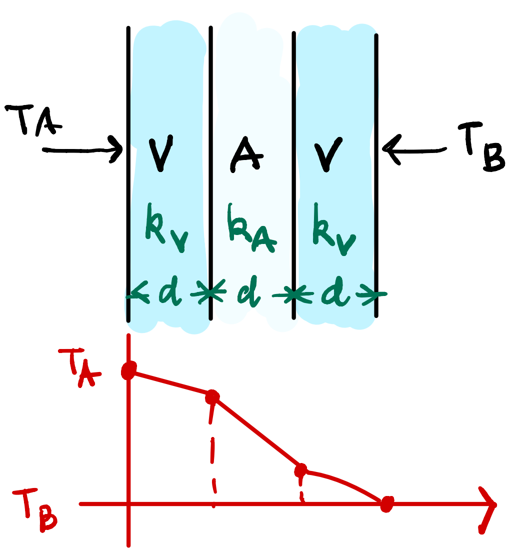
$$\Rightarrow \dot Q = -\frac{S}{r_1}(T_C - T_A) = -\frac{S}{r_1}\left[\frac{r_2 T_A + r_1 T_B}{r_1 + r_2} - T_A\right] = S\,\frac{T_B - T_A}{r_1 + r_2} = S\,\frac{\Delta T}{r_{TOT}}$$

ovvero, come previsto, $\dot q = \Delta T / r_{TOT}$, e le cadute di temperatura sulle due lamine sono $\Delta T_1 = \Delta T\,\frac{r_1}{r_1 + r_2}$, $\Delta T_2 = \Delta T\,\frac{r_2}{r_1 + r_2}$,

ovvero la caduta di temperatura è proporzionale a l_i/k_i:



Esempio isolamento di due lamine con una intercapedine isolante



Flusso con lamina singola: $\dot q_s = k_V\frac{\Delta T}{d} = \frac{\Delta T}{r_V}$

doppio "vetro" con aria: $\dot q_D = \frac{\Delta T}{r_{TOT}} = \frac{\Delta T}{2r_V + r_A}$.

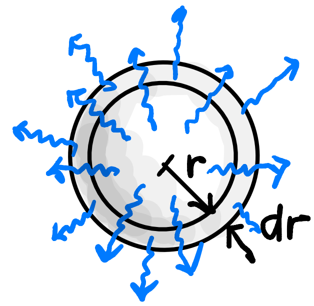
Numericamente

$k_V \simeq 1\ W/m{\cdot}K$; $k_A \simeq 0.025\ W/m{\cdot}K = k_V/40 \Rightarrow$

$r_{TOT} = \frac{2d}{k_V} + \frac{d}{k_A} \simeq d/k_A = r_A \Rightarrow \dot q_D \simeq \frac{\Delta T}{r_A} = \frac{r_V}{r_A}\dot q_s$

cioè il flusso con il doppio vetro è ridotto di 40 volte (per merito dell'aria!)

È anche possibile modificare l'equazione del calore di Fourier quando la geometria non è quella delle lamine a facce piane e parallele. Si tratta essenzialmente di un esercizio matematico interessante che affrontiamo qui a grandi linee, piuttosto semplicemente cambiando il volume di controllo attraverso il quale c'è eventualmente il flusso termico.



Prendiamo una geometria sferica:
il volume infinitesimo di controllo è lo strato sferico infinitesimo di raggio r e spessore dr, ovvero volume $dV = 4\pi r^2 dr$ e superficie $S = 4\pi r^2$.

Siccome lo spessore è infinitesimo vale ancora la legge di Fourier per facce parallele nel calcolo del flusso (di potenza termica):

$$\delta\dot{Q} = d(\dot{q}S) = -\frac{\partial}{\partial r}(\dot{q}S)\,dr = -4\pi\frac{\partial}{\partial r}(r^2\dot{q})\,dr$$

dove il segno negativo ancora una volta esprime un bilancio netto uscente se r aumenta fino a $r+dr$.

Scriviamo la relazione di continuità (conservazione) per l'energia:

$$\delta\dot{Q} = C\frac{\partial T}{\partial t} = c\,dm\frac{\partial T}{\partial t} = c\cdot\rho\,dV\frac{\partial T}{\partial t} = c\cdot\rho\cdot 4\pi r^2 dr\frac{\partial T}{\partial t}$$

per cui, complessivamente, $\rho\cdot c\cdot r^2\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial r}(r^2\dot{q})$, che combiniamo con la legge conduttiva di Fourier, $\dot{q} = -k\,\partial T/\partial r$ per ottenere

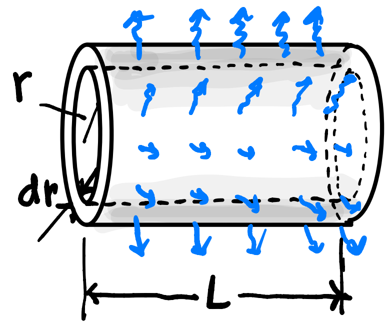
$$\rho\cdot c\cdot r^2\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(-k r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right)$$ ovvero, se k è costante (solido uniforme), $$\rho\cdot c\, r^2\frac{\partial T}{\partial t} = k\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right)$$

che di solito si scrive così:

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right)}$$

Questa è la forma sferica dell'equazione del calore di Fourier.

Un'altra forma molto importante dell'equazione di Fourier è quella cilindrica e per ottenerla si procede come nel caso sferico utilizzando un nuovo volume infinitesimo di controllo:



$$dV = 2\pi r L dr, \quad S = 2\pi r L$$

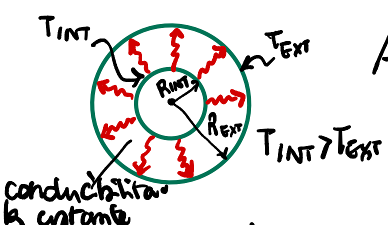
$$\Rightarrow \delta\dot{Q} = d(\dot{q}S) = -\frac{\partial}{\partial r}(\dot{q}S)dr = -2\pi L\frac{\partial}{\partial r}(r\dot{q})dr$$

continuità: $\delta\dot{Q} = C\frac{\partial T}{\partial t} = c \cdot \rho \cdot 2\pi r L dr \frac{\partial T}{\partial t} = -2\pi L \frac{\partial}{\partial r}(r\dot{q})dr,$

$$\dot{q} = -k\frac{\partial T}{\partial r} \Rightarrow \quad c \cdot \rho \cdot r\frac{\partial T}{\partial t} = k\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) \quad \text{ovvero}$$

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)}$$

Esempio: flusso termico indipendente dal tempo (stazionario) tra due sfere concentriche alle temperature fisse T_{INT} e T_{EXT}:



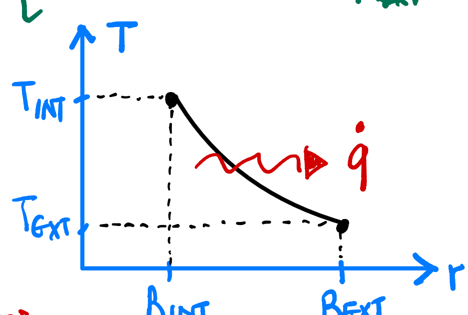
Applicazione dell'equazione di Fourier sferica con $\partial T/\partial t = 0$:

$$0 = \frac{\partial T}{\partial t} = \alpha\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dT}{dr}\right) \Leftrightarrow r^2\frac{dT}{dr} = \text{costante} \equiv A$$

$$\Rightarrow \frac{dT}{dr} = \frac{A}{r^2} \Rightarrow T = -\frac{A}{r} + B \; ;$$ condizioni al contorno: $\begin{cases} T(R_{INT}) = T_{INT} = -\frac{A}{R_{INT}} + B \\ T(R_{EXT}) = T_{EXT} = -\frac{A}{R_{EXT}} + B \end{cases}$

Risolvendo: $A = \frac{T_{INT} - T_{EXT}}{1/R_{EXT} - 1/R_{INT}}$; $B = T_{EXT} + \frac{A}{R_{EXT}} \Rightarrow$

$$T = T_{EXT} + \frac{(T_{INT} - T_{EXT})}{R_{INT} - R_{EXT}} \cdot R_{INT}\left(1 - \frac{R_{EXT}}{r}\right)$$



Il flusso è subito calcolato dalla legge di Fourier:

$$\dot{q} = -k\frac{dT}{dr} = -\frac{k}{r^2}\frac{R_{INT}R_{EXT}}{R_{EXT} - R_{INT}}(T_{EXT} - T_{INT}) > 0$$ [flusso uscente se $T_{INT} > T_{EXT}$]

La potenza termica è $\dot{Q} = S\dot{q} = 4\pi r^2\dot{q} = 4\pi k(T_{INT} - T_{EXT}) \cdot \frac{R_{INT}R_{EXT}}{R_{EXT} - R_{INT}}$

e la resistenza termica è $R^t = \frac{\Delta T}{\dot{Q}} = \frac{1}{4\pi k}\frac{R_{EXT} - R_{INT}}{R_{INT}R_{EXT}}$ $\left[\frac{K}{\text{watt}}\right]$

Si può dire qualcosa anche sui fenomeni convettivi, ovvero quelli innescati conduttivamente in un mezzo fluido che dunque prevede il trasporto termico di energia contestuale al movimento di materia.

Per farlo utilizziamo un semplice modello fenomenologico ed empirico che viene fatto risalire a Isaac Newton. In esso si considera un corpo solido di superficie S la cui temperatura è T_S ed è immerso in un fluido la cui temperatura "indisturbata", ovvero a distanza sufficientemente grande dall'oggetto, è T_∞, differente da T_S (altrimenti non nasce convezione).

Secondo Newton il flusso termico che nasce è direttamente proporzionale alla differenza di temperatura tra la superficie esposta del corpo e quella indisturbata del fluido:

$$\dot{q}_{CONV} \propto T_S - T_\infty \quad \text{ovvero} \quad \dot{Q}_{CONV} = h\,S\,(T_S - T_\infty)$$

in cui h [che nel SI si misura in $W/K \cdot m^2$] è il coefficiente di convezione. Esso dipende in modo effettivo estremamente complicato da molti fattori: natura del fluido, forma del corpo, sua orientazione, trattamento della superficie, ventilazione, velocità ...

Valori tipici variano negli intervalli da $\sim 1 \frac{W}{K \cdot m^2}$ a $\sim 500 \frac{W}{K \cdot m^2}$ nei gas e da $\sim 10 \frac{W}{m^2 K}$ a $50000 \frac{W}{m^2 K}$ nei liquidi (questi numeri cambiano molto se c'è ventilazione forzata).

Per limitarsi qui a un semplice esempio, consideriamo il flusso convettivo che interessa un corpo umano (vestito: temperatura della superficie - degli abiti - dell'ordine $T_S \sim 30°C$) in aria immobile con temperatura indisturbata $T_\infty \sim 20°C$).

Stima possibile con $h \sim 5 \frac{W}{m^2 K}$ e $S \sim 1\,m^2 \Rightarrow \dot{Q}_{CONV} = h S \Delta T = 50 W$, che può essere un valore decisamente non trascurabile in molti casi. Come già detto, con ventilazione forzata h e dunque $\dot{Q}_{CONV}$ aumentano molto.

Il parametro h si misura in laboratorio a partire da valori fissati di $\dot{Q}_{CONV}$