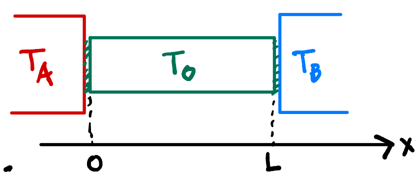
Possiamo anche accennare a qualche esempio di campo di temperatura (e flusso termico associato) che varia nel tempo, ovvero di tipo non-stazionario, come è previsto che accada quando le condizioni iniziali sono di non-equilibrio. L'equazione del calore di Fourier è proprio fatta con questo scopo: ottenere il campo scalare $T(\vec{r},t)$:

ma la $\alpha \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \dfrac{\partial T}{\partial t}$ non è più uguale a zero! Riprendiamo il caso di un oggetto (in una dimensione) che realizza un collegamento conduttivo (un "ponte termico") tra due termostati ideali a temperature fissate T_A e $T_B < T_A$. Supponiamo che il materiale di collegamento sia inizialmente a una temperatura uniforme $T_0 < T_B$.



Questo implica che il campo di temperatura che caratterizza il ponte termico deve soddisfare a queste

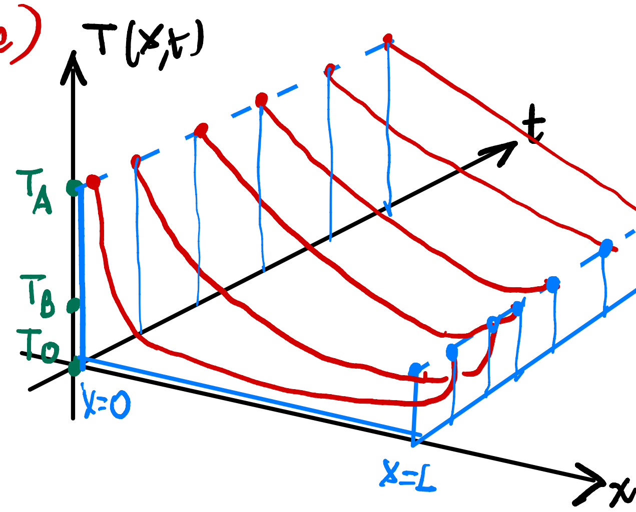
condizioni "al contorno", $T(x=0,t)=T_A \quad \forall t$
$T(x=L,t)=T_B \quad \forall t$

condizioni "iniziali", $T(x,t=0)=T_0 \quad x\in[0,L]$

(con qualche attenzione ai valori al bordo all'istante $t=0$, ma sono dettagli matematici).

Le condizioni al contorno "fissano sui bordi" le temperature agli estremi, le condizioni iniziali "fissano nel ponte" la temperatura uniforme a $t=0$

Data la diffusività $\alpha = k/\rho c$ e queste condizioni, ci sono tecniche matematiche (per esempio "trasformate" di Fourier o Laplace) che, almeno in questo caso, conducono a una soluzione esatta del campo $T(x,t)$:

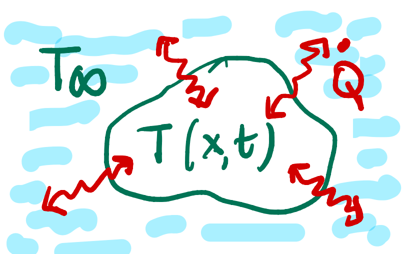


$$T(x,t) = T_0 + (T_A - T_0)\left[\operatorname{erfc}\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} - \operatorname{erfc}\frac{2L-x}{2\sqrt{\alpha t}}\right] +$$
$$+ (T_B - T_0)\left[\operatorname{erfc}\frac{L-x}{2\sqrt{\alpha t}} - \operatorname{erfc}\frac{L+x}{2\sqrt{\alpha t}}\right] \quad \text{dove}$$

$\operatorname{erfc}(z) = 1 - \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^z e^{-y^2}dy$ è la "funzione complementare degli errori".

È anche interessante considerare un semplice esempio di temperatura dipendente dal tempo come effetto combinato di trasporto termico per conduzione (internamente a un corpo tipicamente solido) e convezione (esternamente all'oggetto in questione).

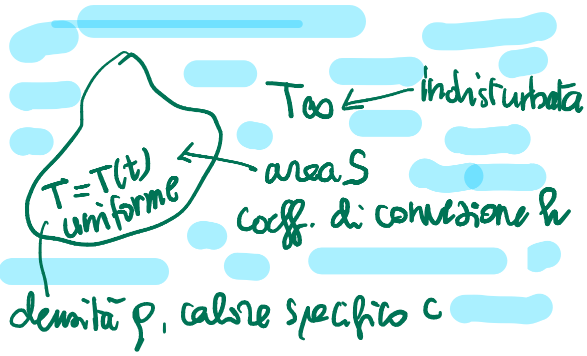
A seconda di varie condizioni fisiche possibili, si hanno essenzialmente due possibili comportamenti, nei quali la temperatura interna all'oggetto, pur variando nel tempo, è uniforme comunque internamente a esso e sulla sua superficie oppure, nell'altro caso, varia sia nel tempo che all'interno e sulla superficie del corpo; complessivamente, comunque, distinguiamo i meccanismi conduttivo (interno) e convettivo (esterno):



Se $T=T(t)$ nel corpo allora si parla di problema a «parametri concentrati» o modello «lumped», se invece $T=T(x,t)$ il problema è «non-lumped».

Il tipo di processo (lumped o meno) dipende da vari fattori: se l'oggetto è relativamente piccolo e buon conduttore termico e se l'ambiente esterno non è molto convettivo, allora ci si aspetta che la temperatura interna (e superficiale) del corpo "abbia tempo" per uniformarsi ovunque e dunque risultare essenzialmente dipendente solo dal tempo. Allora il sistema è ben descritto «a parametri concentrati».
Se invece l'oggetto è esteso (in volume e area esposta), conduce male internamente ed è immerso in un fluido con grande effetto convettivo, allora la temperatura varia internamente all'oggetto in vari punti (per esempio passando dal suo esterno al suo interno) ed è dunque dipendente anche dalla posizione. Il sistema NON è parametri concentrati.

E' possibile assegnare un criterio quantitativo per stabilire a priori il comportamento del sistema. Prima consideriamo un caso di raffreddamento/riscaldamento a parametri concentrati



Modello convettivo di Newton:

$$\dot{Q} = hS(T(t)-T_\infty).$$

La temperatura iniziale del corpo è $T(t=0)=T_0$.

$$\dot{Q} = \frac{\delta Q}{dt} \Rightarrow \delta Q = hS[T(t)-T_\infty]\,dt = -C\,dT = -c\cdot m\,dT,$$

segno meno perché se $T_0 > T_\infty$ c'è raffreddamento

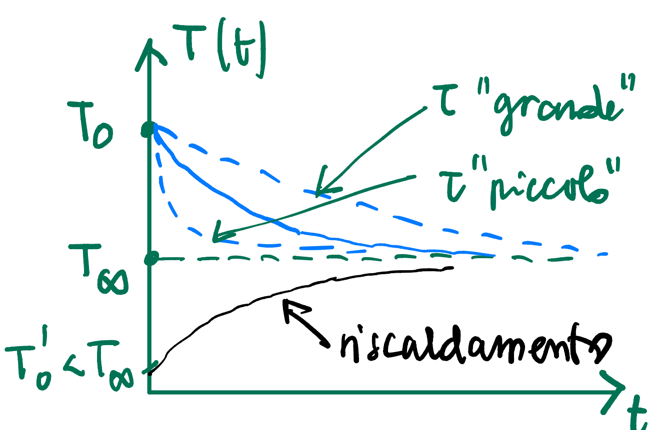
$\Rightarrow$ posto $dT = d(T(t)-T_\infty)$ [T_∞ è costante] $\Rightarrow$

$$\frac{d(T(t)-T_\infty)}{T(t)-T_\infty} = -\frac{h\cdot S}{c\cdot m}dt = -\frac{h\cdot S}{c\cdot\rho\cdot V}dt = -\frac{dt}{\tau}$$

con $\tau = \frac{c\cdot\rho\cdot V}{h\cdot S}$ che è dimensionalmente un tempo. Integrando

$$\ln\frac{T(t)-T_\infty}{T(0)-T_\infty} = -t/\tau \Rightarrow T(t) = T_\infty + (T_0 - T_\infty)e^{-t/\tau}$$

che è la legge di raffreddamento (se $T_0 > T_\infty$, ma potrebbe diventare di riscaldamento) con tipico andamento esponenziale



Questo andamento permette di stimare un tempo «tipico» di raffreddamento.

Il modello prevede una variazione di temperatura (verso T_∞) relativamente rapida se τ è piccolo, ovvero se h, S sono grandi (importante esposizione convettiva) e se V, ρ, c sono piccoli (efficacia conduttiva relativamente elevata per un dato k).

Assumendo un comportamento «lumped» la conducibilità termica non ha influenza sul tempo di raffreddamento τ perchè questo è regolato solo dagli effetti convettivi esterni.

Notare che il bilancio termico complessivo è rispettato nel modello:

$$Q_{TOT} = \int_0^\infty \dot{Q}\, dt \; ; \quad \text{essendo} \quad \dot{Q} = hS\left(T(t)-T_\infty\right) = hS\left(T_0-T_\infty\right)e^{-t/\tau}$$

$$\Rightarrow Q_{TOT} = hS\left(T_0-T_\infty\right)\int_0^\infty e^{-t/\tau}dt = hS\cdot\tau\cdot\left(T_0-T_\infty\right) = c\cdot\rho\cdot V\left(T_0-T_\infty\right) = C\Delta T$$

Resta il fatto che in casi realistici (corpi di dimensioni "estese", che non hanno buona conducibilità) la temperatura interna non è più uniforme ed è necessario risolvere esplicitamente (e, di solito, numericamente) l'equazione del calore di Fourier nella forma più generale.

C'è un criterio tecnico per stabilire se l'approssimazione lumped è valida: si confrontano i flussi termici conduttivo (interno) e convettivo (esterno).

$$\frac{\dot{Q}_{EXT}}{\dot{Q}_{INT}} = \frac{\dot{Q}_{CONV}}{\dot{Q}_{COND}} \approx \frac{h\,\Delta T}{k\,\frac{\Delta T}{L_c}} \sim \frac{h}{k}L_c$$

dove L_c è una misura "ragionevole" di V/S ossia di una lunghezza "caratteristica" del corpo.

Si definisce il "numero di Biot", $Bi \equiv \frac{hL_c}{k} = \frac{L_c/k}{1/h} = \frac{r_{COND}}{r_{CONV}} = \frac{r_{INT}}{r_{EXT}}$

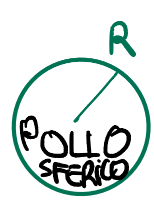
e si stabilisce che il comportamento è «lumped» se $Bi < 0.1$.

Per esempio: $k \sim 1\ W/K\cdot m$

$L_c \sim \frac{V}{S} \sim \frac{R}{2} \sim 1\,cm$

$h_{\text{aria ferma}} \sim 5\ W/K\cdot m^2$

$\Rightarrow Bi \sim 0.05$ (lumped)



$k \sim 1\ W/K\cdot m$

$L_c \sim \frac{R}{3} \sim 5\,cm$

$h_{\text{forno ventilato}} \sim 30\ \frac{W}{K\cdot m^2}$

$\Rightarrow Bi \sim 1.5$ (non-lumped)