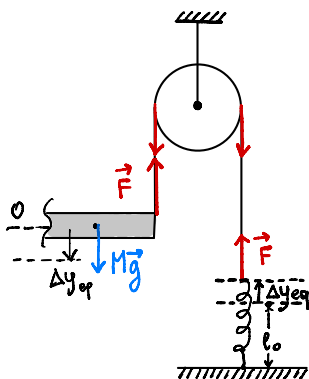


1

(a)

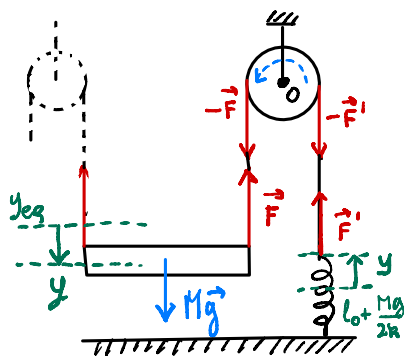


Condizione di equilibrio statico iniziale

$$M\vec{g} + 2\vec{F} = 0 \Leftrightarrow F = Mg/2; F = k\Delta y_{eq} \Rightarrow \Delta y_{eq} = \frac{Mg}{2k}$$

(se la massa M è scesa di Δy_{eq} anche le due molle si allungano della stessa quantità a partire dalle loro lunghezze di riposo)

(b)



Equazioni del moto (proiettate)

- sbarretta $M\ddot{y} = Mg - 2F$
- carrucole $I_0\ddot{\alpha} = R(F - F'), \alpha = a/R = \ddot{y}/R$
- molle $k(y + \frac{Mg}{2k} + l_0 - l_0) = F'$

$$\Rightarrow \frac{I_0\ddot{y}}{R^2} = \frac{Mg}{2} - \frac{M}{2}\ddot{y} - ky - \frac{Mg}{2} = -\frac{M}{2}\ddot{y} - ky$$

$$\Rightarrow \ddot{y} \left(\frac{2I_0}{R^2} + 1 \right) = -2ky$$

che è l'equazione di moto armonico della massa "efficace"

$M_{eff} = M + 2I_0/R^2$ con periodo

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{M_{eff}}{2k}} = 2\pi \sqrt{\frac{M + 2I_0/R^2}{2k}} = \frac{2\pi}{\omega}$$

(c) legge oraria riferita alla posizione di equilibrio $y(t) = A \sin(\omega t + \phi)$, $\omega = 2\pi/T$

Rilasciando il sistema con le molle a riposo significa che le condizioni iniziali da soddisfare sono $y(0) = -Mg/2k$, $\dot{y}(0) = 0$

$$\Rightarrow y(t) = -\frac{Mg}{2k} \cos \omega t; \dot{y}(t) = \frac{\omega Mg}{2k} \sin \omega t; E_k = \frac{1}{2} M \dot{y}^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} I_0 \left(\frac{\dot{y}^2}{R^2} \right)$$

$$\text{Quindi } E_k = \frac{1}{2} \dot{y}^2 \left[M + 2 \frac{I_0}{R^2} \right] = \frac{M^2 g^2}{4k} \sin^2 \omega t : \text{ l'ampiezza di } E_k (M^2 g^2 / 4k) \text{ non}$$

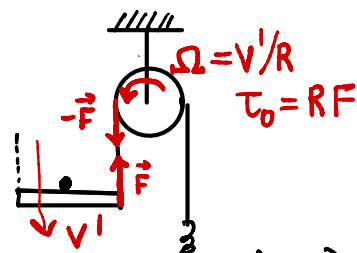
dipende da I_0 perché il momento d'inerzia delle carrucole non cambia l'energia (potenziale) disponibile all'inizio del moto.

(d) numericamente $\gamma = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2k}{M + 2I_0/R^2}} \cong 0.82 \text{ Hz}$

(e) La quantità di moto dell'asta e della massa m è inizialmente $m v_0$ e dopo l'urto diventa $(m + M) v'$. La variazione di questa quantità è dunque $\Delta p = (m + M) v' - m v_0$. Non è nulla a causa dello "strattone" che le funi esercitano sull'asta: se indichiamo con $\vec{F}$ la forza impulsiva delle funi

possiamo scrivere (per il teorema dell'impulso) che $\Delta p = -2 \int F dt$:
 2 perché ci sono due funi e con segno negativo perché $\vec{F}$ è verso l'alto.

Queste stesse forze generano un momento
 impulsivo sulle carrucole $\tau_0 = RF$ che ne
 varia il momento angolare secondo la



$$\Delta L_0 = \int \tau_0 dt = R \int F dt = I_0 \Omega = I_0 v' / R$$

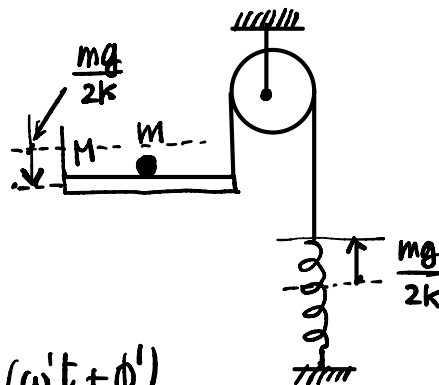
in cui $\Omega = v' / R$ è la velocità angolare con la quale le carrucole iniziano
 a ruotare in seguito allo strattone. Quindi $\Delta p = -2 \int F dt = -2 I_0 v' / R^2$
 e dunque $(m+M)v' - mv_0 = -2 I_0 v' / R^2 \Rightarrow$

$$v' = \frac{mv_0}{(M+m+2I_0/R^2)}$$

Nel brevissimo intervallo di tempo dell'urto le molle non sono in grado di
 contribuire alla variazione delle quantità di moto.

Subito dopo l'urto il sistema risponde alle stesse equazioni di moto di prima:
 si tratta ancora di un oscillatore armonico con una massa "effettiva" diversa
 e una nuova posizione di equilibrio. Il periodo è

$$T' = 2\pi \sqrt{\frac{M+m+2I_0/R^2}{2k}}$$



e l'oscillazione avviene attorno all'equilibrio
 abbassato di $mg/2k$ rispetto al caso precedente
 (prima dell'urto) a causa del peso di m che si è
 incollata a M . La nuova legge oraria è $y' = A' \sin(\omega' t + \phi')$

con condizioni iniziali $y'(0) = -mg/2k$, $\dot{y}'(0) = v'$ [e $\omega' = 2\pi/T'$] che,
 imposte a y' , danno

$$A' \sin \phi' = -mg/2k, \quad \omega' A' \cos \phi' = v'$$

Questo permettono di ottenere l'ampiezza richiesta delle oscillazioni:

$$A' = \sqrt{\left(\frac{mg}{2k}\right)^2 + \left(\frac{v'}{\omega'}\right)^2} \quad \text{con} \quad \frac{v'}{\omega'} = \frac{mv_0}{\sqrt{2k(M+m+2I_0/R^2)}}$$

(f) Succede di tutto: per esempio, le funi possono slittare perché l'attrito
 statico non è più sufficiente e questo cambia la massa effettiva; le
 funi possono rompersi, le molle non si comportano elasticamente...

2

Il processo è irreversibile a causa di non quasi-staticità di origine termica ($T_G > T_A$) e di dissipazioni meccaniche causate dalle forze di attrito agenti sul contenitore.

Per calcolare tutte le quantità richieste si fa riferimento agli stati di equilibrio termodinamici iniziale e finale.

(a) Variazione di energia interna del gas $\Delta U_G = C_V(T_A - T_G) = \frac{5}{2}R(T_A - T_G)$
 variazione di entalpia del gas $\Delta H_G = C_P(T_A - T_G) = \frac{7}{2}R(T_A - T_G)$.

Sono entrambe negative (il calore a pressione costante è ceduto);

lavoro di volume: $W_G = p_{\text{ext}} \Delta V = R(T_A - T_G) < 0$, ovvero il gas viene compresso per raffreddarsi a volume costante.

L'energia ricevuta dall'ambiente è la somma del calore ceduto dal gas e dell'energia cinetica dissipata:

$$Q_A = -\Delta H_G + K_i = \frac{7}{2}R(T_G - T_A) + \frac{1}{2}Mv_i^2$$

(b) La variazione di entropia del gas si ottiene considerando una trasformazione reversibile a pressione costante:

$$\Delta S_G = C_P \ln \frac{T_A}{T_G} = \frac{7}{2}R \ln \frac{T_A}{T_G} < 0;$$

quella dell'ambiente (a temperatura costante T_A) è

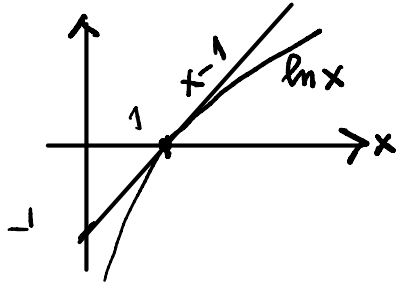
$$\Delta S_A = \frac{Q_A}{T_A} = -\frac{\Delta H_G}{T_A} + \frac{K_i}{T_A} = \frac{7}{2}R \left(\frac{T_G}{T_A} - 1 \right) + \frac{1}{2} \frac{Mv_i^2}{T_A} > 0;$$

Quindi $\Delta S_{\text{univ}} = \frac{7}{2}R \left[\ln \frac{T_A}{T_G} + \frac{T_G}{T_A} - 1 \right] + \frac{K_i}{T_A}$

che si separa nei contributi meccanico e termico:

$$\Delta S_{\text{term}} = \frac{7}{2}R \left[\ln \frac{T_A}{T_G} + \frac{T_G}{T_A} - 1 \right]; \quad \Delta S_{\text{mecc}} = \frac{K_i}{T_A}.$$

Ponendo $x = T_G/T_A > 1$ si ha che $\Delta S_{\text{term}} = c_p (x - 1 - \ln x)$;



la pendenza di $\ln x$ in $x=1$ è 1 per cui la sua tangente è $y = x - 1$. Siccome $\ln x$ è concava $\Rightarrow x - 1 > \ln x$ ovunque per cui è dimostrato che $\Delta S_{\text{term}} > 0$ (e dunque anche $\Delta S_{\text{univ}} > 0$).

(c) Posto $\Delta S_{\text{term}} = k \Delta S_{\text{mecc}} \Leftrightarrow K_i = \frac{7R}{2k} \left[T_G - T_A + T_A \ln \frac{T_A}{T_G} \right]$.

(d) Energia di Gibbs riferita all'ambiente $G = H - T_A S \Rightarrow$

$$\Rightarrow \Delta G = \Delta H_G - T_A \Delta S_G = c_p (T_A - T_G) - T_A \cdot c_p \ln \frac{T_A}{T_G} = -T_A \Delta S_{\text{term}};$$

$-\Delta G$ ammonta al lavoro che non è stato possibile recuperare a causa del raffreddamento irreversibile del gas da T_G a T_A .

(e) Per ottenere il lavoro in totale non recuperato, si deve aggiungere a quello perso per dissipazione termica del punto precedente il contributo dissipato per attrito, che è proprio K_i . Quindi

$$W_{\text{perso}} = -\Delta G + K_i = T_A \Delta S_{\text{term}} + T_A \Delta S_{\text{mecc}} = T_A \Delta S_{\text{univ}}$$

(f) Se il pistone fosse stato bloccato, il problema si risolveva sostituendo c_v al posto di c_p nei bilanci energetici e di entropia e il potenziale termodinamico da usare sarebbe stato l'energia libera di Helmholtz, $F = U - T_A S$.

(g) Valori numerici utilizzando le espressioni sopra ricavate:

$$\Delta U_G \cong -623 \text{ J}; \Delta H_G \cong -873 \text{ J}; \Delta S_{\text{term}} \cong +0.136 \frac{\text{J}}{\text{K}}; \Delta S_{\text{mecc}} \cong 0.068 \frac{\text{J}}{\text{K}};$$

$$\Delta S_{\text{univ}} \cong 0.204 \frac{\text{J}}{\text{K}}; v_i \cong 14.3 \text{ m/s}; W_{\text{perso}} \cong 61 \text{ J}.$$

Probabilità di inventire il processo

$$\frac{P_{\text{INV}}}{P_{\text{DIR}}} \sim e^{-\frac{\Delta S_{\text{univ}}}{k_B}} \sim e^{-10^{22}} = \text{zero}.$$